

## Fragmente philosophischen Inhalts.

Die philosophischen Speculationen, deren Ergebnisse, so weit sie sich aus dem Nachlass zusammenstellen lassen, hier mitgetheilt sind, haben Riemann einen grossen Theil seines Lebens hindurch begleitet. Ueber die Zeit der Entstehung der einzelnen Bruchstücke lässt sich schwer etwas Sicheres feststellen. Die vorhandenen Entwürfe sind weit entfernt von einer zusammenhängenden, zur Publication bereiten Ausarbeitung, wenn auch manche Stellen darauf deuten, dass Riemann zu gewissen Zeiten eine solche beabsichtigt hat; sie genügen allenfalls, um den Standpunkt Riemann's zu den psychologischen und naturphilosophischen Fragen im Allgemeinen zu charakterisiren, und den Gang anzudeuten, den seine Untersuchungen genommen haben, leider aber fehlt fast jede Ausführung ins Einzelne. Welchen Werth Riemann selbst diesen Arbeiten beigelegt hat, ergibt sich aus folgender Notiz:

„Die Arbeiten, welche mich jetzt vorzüglich beschäftigten, sind

1. In ähnlicher Weise wie dies bereits bei den algebraischen Functionen, den Exponential- oder Kreisfunctionen, den elliptischen und Abel'schen Functionen mit so grossem Erfolge geschehen ist, das Imaginäre in die Theorie anderer transcendenten Functionen einzuführen; ich habe dazu in meiner Inauguraldissertation die nothwendigsten allgemeinen Vorarbeiten geliefert. (Vgl. diese Dissertation Art. 20.)

2. In Verbindung damit stehen neue Methoden zur Integration partieller Differentialgleichungen, welche ich bereits auf mehrere physikalische Gegenstände mit Erfolg angewandt habe.

3. Meine Hauptarbeit betrifft eine neue Auffassung der bekannten Naturgesetze — Ausdruck derselben mittelst anderer Grundbegriffe — wodurch die Benutzung der experimentellen Data über die Wechselwirkung zwischen Wärme, Licht, Magnetismus und Electricität zur Erforschung ihres Zusammenhangs möglich wurde. Ich wurde dazu hauptsächlich durch das Studium der Werke Newton's, Euler's und — andererseits — Herbart's geführt. Was letzteren betrifft, so konnte ich mich den frühesten Untersuchungen Herbart's, deren Re-

sultate in seinen Promotions- und Habilitationsthesen (vom 22. u. 23. October 1802) ausgesprochen sind, fast völlig anschliessen, musste aber von dem späteren Gange seiner Speculation in einem wesentlichen Punkte abweichen, wodurch eine Verschiedenheit in Bezug auf seine Naturphilosophie und diejenigen Sätze der Psychologie, welche deren Verbindung mit der Naturphilosophie betreffen, bedingt ist.“

Ferner an einer andern Stelle zu genauerer Bezeichnung des Standpunktes:

„Der Verfasser ist Herbartianer in Psychologie und Erkenntniss-theorie (Methodologie und Eidologie), Herbart's Naturphilosophie und den darauf bezüglichen metaphysischen Disciplinen (Ontologie und Synechologie) kann er meistens nicht sich anschliessen.“

Die drei unter dem gemeinsamen Titel „III. Naturphilosophie“ vereinigten Fragmente haben in dieser zweiten Auflage eine Umstellung erfahren. Die Nummer 2 der ersten Auflage ist mit Nr. 3 vertauscht worden. Nach einer durch innere Gründe gut unterstützten Vermuthung des Herrn Dr. Isenkrahe in Bonn ist es nämlich der mit der Ueberschrift „Gravitation und Licht“ bezeichnete Aufsatz, auf den sich die im Lebenslauf mitgetheilte Stelle eines Briefes von Riemann vom 28. Dec. 1853 bezieht, wonach Riemann eine Veröffentlichung dieser Untersuchungen im Auge hat. Der in ganz anderen Gedankenkreisen sich bewegende Aufsatz „Neue mathematische Principien der Naturphilosophie“, mit der Bemerkung „gefunden am 1. März 1853“ ist demnach früheren Ursprungs, und die darin ausgesprochene kühne Hypothese des Verschwindens der Materie später von Riemann nicht weiter verfolgt worden.

---

Nec mea dona tibi studio dispersa fideli  
Intellecta prius quam sint, contempta relinquo.  
Lucretius.

## I. Zur Psychologie und Metaphysik.

Mit jedem einfachen Denktact tritt etwas Bleibendes, Substantielles in unsere Seele ein. Dieses Substantielle erscheint uns zwar als eine Einheit, scheint aber (in sofern es der Ausdruck eines räumlich und zeitlich ausgedehnten ist) eine innere Mannigfaltigkeit zu enthalten; ich nenne es daher „Geistesmasse“. — Alles Denken ist hiernach Bildung neuer Geistesmassen.

Die in die Seele eintretenden Geistesmassen erscheinen uns als Vorstellungen; ihr verschiedener innerer Zustand bedingt die verschiedene Qualität derselben.

Die sich bildenden Geistesmassen verschmelzen, verbinden oder compliciren sich in bestimmtem Grade, theils unter einander, theils mit älteren Geistesmassen. Die Art und Stärke dieser Verbindungen hängt von Bedingungen ab, die von Herbart nur zum Theil erkannt sind und die ich in der Folge ergänzen werde. Sie beruht hauptsächlich auf der inneren Verwandtschaft der Geistesmassen.

Die Seele ist eine compacte, aufs Engste und auf die mannigfaltigste Weise in sich verbundene Geistesmasse. Sie wächst beständig durch eintretende Geistesmassen, und hierauf beruht ihre Fortbildung.

Die einmal gebildeten Geistesmassen sind unvergänglich, ihre Verbindungen unauflöslich; nur die relative Stärke dieser Verbindungen ändert sich durch das Hinzukommen neuer Geistesmassen.

Die Geistesmassen bedürfen zum Fortbestehen keines materiellen Trägers und üben auf die Erscheinungswelt keine dauernde Wirkung aus. Sie stehen daher in keiner Beziehung zu irgend einem Theile der Materie und haben daher keinen Sitz im Raume.

Dagegen bedarf alles Eintreten, Entstehen, alle Bildung neuer Geistesmassen und alle Vereinigung derselben eines materiellen Trägers. Alles Denken geschieht daher an einem bestimmten Ort.

(Nicht das Behalten unserer Erfahrung, nur das Denken strengt an, und der Kraftaufwand ist, soweit wir dies schätzen können, der geistigen Thätigkeit proportional.)

Jede eintretende Geistesmasse regt alle mit ihr verwandten Geistesmassen an und zwar desto stärker, je geringer die Verschiedenheit ihres inneren Zustandes (Qualität) ist.

Diese Anregung beschränkt sich aber nicht bloß auf die verwandten Geistesmassen, sondern erstreckt sich mittelbar auch auf die mit ihnen zusammenhängenden (d. h. in früheren Denkprocessen mit ihnen verbundenen). Wenn also unter den verwandten Geistesmassen ein Theil unter sich zusammenhängt, so werden diese nicht bloß unmittelbar, sondern auch mittelbar angeregt und daher verhältnissmässig stärker als die übrigen.

Die Wechselwirkung zweier gleichzeitig sich bildenden Geistesmassen wird bedingt durch einen materiellen Vorgang zwischen den Orten, wo beide gebildet werden. Ebenso treten aus materiellen Ursachen alle sich bildenden Geistesmassen mit unmittelbar vorher gebildeten in unmittelbare Wechselwirkung; mittelbar aber werden alle mit diesen zusammenhängenden älteren Geistesmassen zur Wirksamkeit angeregt, und zwar desto schwächer, je entfernter sie mit ihnen und je weniger sie unter sich zusammenhängen.

Die allgemeinste und einfachste Aeusserung der Wirksamkeit älterer Geistesmassen ist die Reproduction, welche darin besteht, dass die wirkende Geistesmasse eine ihr ähnliche zu erzeugen strebt.

Die Bildung neuer Geistesmassen beruht auf der gemeinschaftlichen Wirkung theils älterer Geistesmassen, theils materieller Ursachen, und zwar hemmt oder begünstigt sich alles gemeinschaftlich Wirkende nach der inneren Ungleichartigkeit oder Gleichartigkeit der Geistesmassen, welche es zu erzeugen strebt.

---

Die Form der sich bildenden Geistesmasse (oder die Qualität der ihre Bildung begleitenden Vorstellung) hängt ab von der relativen Bewegungsform der Materie, in welcher sie gebildet wird, so dass gleiche Bewegungsform der Materie eine gleiche Form der in ihr gebildeten Geistesmasse bedingt, und umgekehrt gleiche Form der Geistesmasse eine gleiche Bewegungsform der Materie, in welcher sie gebildet ist, voraussetzt.

Sämmtliche gleichzeitig (in unserem Cerebrospinalsystem) sich bildenden Geistesmassen verbinden sich in Folge eines physischen (chemisch-electrischen) Processes zwischen den Orten, wo sie sich bilden.

Jede Geistesmasse strebt eine gleichgeformte Geistesmasse zu erzeugen. Sie strebt also diejenige Bewegungsform der Materie herzustellen, bei welcher sie gebildet ist.

Die Annahme einer Seele als eines einheitlichen Trägers des Bleibenden, welches in den einzelnen Acten des Seelenlebens erzeugt wird (der Vorstellungen), stützt sich

1. auf den engen Zusammenhang und die gegenseitige Durchdringung aller Vorstellungen. Um aber die Verbindung einer bestimmten neuen Vorstellung mit anderen zu erklären, ist die Annahme eines einheitlichen Trägers allein nicht ausreichend; vielmehr muss die Ursache, weshalb sie gerade diese bestimmten Verbindungen in dieser bestimmten Stärke eingeht, in den Vorstellungen, mit welchen sie sich verbindet, gesucht werden. Neben diesen Ursachen aber ist die Annahme eines einheitlichen Trägers aller Vorstellungen überflüssig . . .

Wenden wir nun diese Gesetze geistiger Vorgänge, auf welche die Erklärung unserer eigenen inneren Wahrnehmung führt, zur Erklärung der auf der Erde wahrgenommenen Zweckmässigkeit, d. h. zur Erklärung des Daseins und der geschichtlichen Entwicklung an.

Zur Erklärung unseres Seelenlebens mussten wir annehmen, dass die in unseren Nervenprocessen erzeugten Geistesmassen als Theile unserer Seele fortdauern, dass ihr innerer Zusammenhang ungeändert fortbesteht, und sie nur in sofern einer Veränderung unterworfen sind, als sie mit anderen Geistesmassen in Verbindung treten.

Eine unmittelbare Consequenz dieser Erklärungsprincipien ist es dass die Seelen der organischen Wesen, d. h. die während ihres Lebens entstandenen compacten Geistesmassen, auch nach dem Tode fortbestehen. (Ihr isolirtes Fortbestehen genügt nicht.) Um aber die planmässige Entwicklung der organischen Natur, bei welcher offenbar die früher gesammelten Erfahrungen den späteren Schöpfungen zur Grundlage dienen, zu erklären, müssen wir annehmen, dass diese Geistesmassen in eine grössere compacte Geistesmasse, die Erdseele, eintreten und dort nach denselben Gesetzen einem höheren Seelenleben dienen, wie die in unseren Nervenprocessen erzeugten Geistesmassen unserem eigenen Seelenleben.

Wie also z. B. bei dem Sehen einer rothen Fläche die in einer Menge einzelner Primitivfasern erzeugten Geistesmassen zu einer einzigen compacten Geistesmasse sich verbinden, welche gleichzeitig in unserem Denken auftritt, so werden auch die in den verschiedenen Individuen eines Pflanzengeschlechts erzeugten Geistesmassen, welche aus einer klimatisch wenig verschiedenen Gegend der Erdoberfläche in die Erdseele eintreten, zu einem Gesamteindruck sich verbinden. Wie die verschiedenen Sinneswahrnehmungen von demselben Gegenstande sich in unserer Seele zu einem Bilde desselben vereinigen, so

werden sämtliche Pflanzen eines Theils der Erdoberfläche der Erdseele ein bis ins Feinste ausgearbeitetes Bild von dem klimatischen und chemischen Zustande desselben geben. Auf diese Weise erklärt sich, wie aus dem früheren Leben der Erde sich der Plan zu späteren Schöpfungen entwickelt.

Aber nach unseren Erklärungsprincipien bedarf zwar das Fortbestehen vorhandener Geistesmassen keines materiellen Trägers, aber alle Verbindung derselben, wenigstens alle Verbindung verschiedenartiger Geistesmassen kann nur mittelst neuer in einem gemeinschaftlichen Nervenproceſse erzeugter Geistesmassen geschehen.

Aus Gründen, die später entwickelt werden sollen, können wir das Substrat einer geistigen Thätigkeit nur in der ponderablen Materie suchen.

Nun ist es eine Thatsache, dass die starre Erdrinde und alles Ponderable über ihr nicht einem gemeinschaftlichen geistigen Proceſse dient, sondern die Bewegungen dieser ponderablen Massen aus andern Ursachen erklärt werden müssen.

Hiernach bleibt nur die Annahme übrig, dass die ponderablen Massen innerhalb der erstarrten Erdrinde Träger des Seelenlebens der Erde sind.

Sind diese dazu geeignet? Welches sind die äusseren Bedingungen für die Möglichkeit des Lebensprocesses? Die allgemeinen Erfahrungen über die unserer Beobachtung zugänglichen Lebensproceſse müssen dabei die Grundlage bilden; aber nur in soweit es uns gelingt, sie zu erklären, können wir daraus Schlüsse ziehen, welche auch auf andere Erscheinungskreise anwendbar sind.

Die allgemeinen Erfahrungen über die äusseren Bedingungen des Lebensprocesses in dem uns zugänglichen Erscheinungskreise sind:

1. Je höher und vollständiger entwickelt der Lebensprocess, desto mehr bedürfen die Träger desselben des Schutzes gegen äussere Bewegungsursachen, welche die relative Lage der Theile zu verändern streben.

2. Die uns bekannten physikalischen Proceſse (Stoffwechsel), welche dem Denkproceſse als Mittel dienen:

- a) Absorption von elastischen durch liquide Flüssigkeiten.
- b) Endosmose.
- c) Bildung und Zersetzung von chemischen Verbindungen.
- d) galvanische Ströme.

3. Die Stoffe in den Organismen haben keine erkennbare krystallinische Structur, sie sind theils fest (sehr wenig spröde), theils

gelatinös, theils liquide oder elastische Flüssigkeiten, immer aber porös, d. h. von elastischen Flüssigkeiten merklich durchdringbar.

4. Unter allen chemischen Elementen sind nur die vier sogenannten organischen allgemeine Träger des Lebensprocesses, und von diesen sind wieder ganz bestimmte Verbindungen, die sogenannten organisirenden, Bestandtheile der organischen Körper (Proteinstoffe, Cellulose etc.).

5. Die organischen Verbindungen bestehen nur bis zu einer bestimmten oberen Temperaturgrenze, und nur bis zu einer bestimmten unteren können sie Träger des Lebensprocesses sein.

ad. 1. Veränderungen in der relativen Lage der Theile werden in stufenweise geringerem Grade bewirkt durch mechanische Kräfte, durch Temperaturänderungen, durch Lichtstrahlen; hiernach können wir die Thatsachen, deren allgemeiner Ausdruck unser Satz ist, folgendermassen ordnen:

1. Die Fortpflanzbarkeit der niederen Organismen durch Theilung. Die bei den höheren Thierorganismen allmählich abnehmende Reproductionsfähigkeit.

2. Die Theile der Pflanze sind gegen Temperaturänderungen desto empfindlicher, je intensiver und je höher entwickelt der Lebensprocess in ihnen ist. In den höheren Thierorganismen herrscht, und zwar in den wichtigsten Theilen am vollkommensten, eine fast constante Wärme.

3. Die Theile des Nervensystems, welche selbständiger Denktätigkeit dienen, sind gegen alle diese Einflüsse möglichst geschützt.

Die zuerst aufgeführte Thatsache hat ihren Grund offenbar darin, dass die relative Lage der Theile desto eher von Vorgängen im Innern der Materie bestimmt werden kann, je weniger sie von äusseren Bewegungsursachen bestimmt wird. Diese Unabhängigkeit von äusseren Bewegungsursachen findet aber innerhalb der Erdrinde in einem weit höheren Grade statt, als es sich durch organische Einrichtungen ausserhalb der Erdrinde irgend erreichen liess.

Unter den folgenden Thatsachen, welche wir im Zusammenhang betrachten, sind die unter 4. und 5. zusammengestellten anscheinend unserer Annahme entgegen; in der That würden sie es sein, wenn diesen von uns wahrgenommenen Bedingungen für die Möglichkeit eines Lebensprocesses eine absolute Gültigkeit beizulegen wäre und nicht bloss eine relative für unsern Erfahrungskreis. Gegen ersteres aber sprechen folgende Gründe:

1. Man müsste alsdann die ganze Natur, mit Ausnahme der Erdoberfläche für todt halten, denn auf allen andern Himmelskörpern

herrschen Wärme- und Druckverhältnisse, unter welchen die organischen Verbindungen nicht bestehen können.

2. Es ist ungereimt, anzunehmen, dass auf der erstarrten Erdrinde Organisches aus Unorganischem entstanden sei. Um das Entstehen der niedersten Organismen auf der Erdrinde zu erklären, muss man schon ein organisirendes Princip, also einen Denkprocess unter Bedingungen annehmen, unter welchen die organischen Verbindungen nicht bestehen konnten.

Wir müssen daher annehmen, dass diese Bedingungen nur für den Lebensprocess unter den jetzigen Verhältnissen auf der Oberfläche der Erde gültig sind, und nur in soweit es uns gelingt, sie zu erklären, können wir daraus die Möglichkeit des Lebensprocesses unter anderen Verhältnissen beurtheilen.

Weshalb also sind nur die vier organischen Elemente allgemeine Träger des Lebensprocesses? Der Grund kann nur in Eigenschaften gesucht werden, durch welche sich diese vier Elemente von allen übrigen unterscheiden.

1. Eine solche allgemeine Eigenschaft dieser vier Elemente findet sich nun darin, dass sie und ihre Verbindungen von allen Stoffen am schwersten und zum Theil bis jetzt gar nicht condensirt werden können.

2. Eine andere gemeinsame Eigenschaft derselben ist die grosse Mannigfaltigkeit ihrer Verbindungen und deren leichte Zersetzbarkeit. Diese Eigenschaft könnte aber ebenso wohl Folge, als Grund ihrer Verwendung zu Lebensprocessen sein.

Dass aber die erstere Eigenschaft, schwer condensirt werden zu können, diese vier Elemente vorzugsweise geeignet macht, Lebensprocessen zu dienen, wird einigermassen schon unmittelbar aus den unter 2. und 3. zusammengestellten thatsächlichen Bedingungen des Lebensprocesses erklärlich, noch mehr aber wenn man die Erscheinungen bei der Condensation der Gase zu liquiden Flüssigkeiten und festen Körpern auf Ursachen zurück zu führen sucht. . .

Zend-Avesta in der That ein lebendig machendes Wort\*), neues Leben schaffend unserem Geiste im Wissen wie im Glauben; denn wie mancher Gedanke, welcher, einst zwar im Entwicklungsgang der Menschheit mächtig wirkend, nur durch Ueberlieferung in uns fort dauerte, erstet jetzt auf einmal aus seinem Scheintode in reinerer Form zu neuem Leben, neues Leben enthüllend in der Natur. Denn wie unermesslich erweitert sich vor unserm Blick das Leben der Natur,

\*) Vgl. Fechner, Zend-Avesta, I, Vorrede S. V.

welches bisher nur auf der Oberfläche der Erde sich ihm kund that, wie unaussprechlich erhabener erscheint es als bisher. Was wir als den Sitz sinn- und bewusstlos wirkender Kräfte betrachteten, das erscheint jetzt als die Werkstatt der höchsten geistigen Thätigkeit. In wunderbarer Weise erfüllt sich, was unser grosser Dichter als das Ziel, welches dem Geist des Forschers vorschwebte, in vorschauender Begeisterung geschildert hat.

Wie Fechner in seiner *Nanna* die Beseeltheit der Pflanzen darzuthun sucht, so ist der Ausgangspunkt seiner Betrachtungen im *Zend-Avesta* die Lehre von der Beseeltheit der Gestirne. Die Methode, deren er sich bedient, ist nicht die Abstraction allgemeiner Gesetze durch die Induction und die Anwendung und Prüfung derselben in der Naturerklärung, sondern die Analogie. Er vergleicht die Erde mit unserem eigenen Organismus, von welchem wir wissen, dass er beseelt ist. Er sucht dabei nicht blos einseitig die Aehnlichkeiten auf, sondern lässt auch ebenso sehr den Unähnlichkeiten ihr Recht angedeihen, und kommt so zu dem Resultat, dass alle Aehnlichkeiten darauf hinweisen, dass die Erde ein beseeltes Wesen, alle Unähnlichkeiten aber darauf, dass sie ein weit höher stehendes beseeltes Wesen, als wir, sei. Die überzeugende Kraft dieser Darstellung liegt in ihrer allseitigen Durchführung im Einzelnen. Der Gesamteindruck des vor uns aufgerollten Bildes von dem Leben der Erde muss der Ansicht Evidenz geben und ersetzen, was den einzelnen Schlüssen an Strenge fehlt. Diese Evidenz beruht wesentlich auf der Anschaulichkeit des Bildes, auf seiner grösstmöglichen Ausführung ins Einzelne. Ich würde daher der Fechner'schen Ansicht zu schaden glauben, wenn ich hier den Gang, welchen er in seinem Werke nimmt, im Auszug darzulegen versuchte. Bei der folgenden Besprechung der Fechner'schen Ansichten werde ich also von der Form, in welcher sie vortragen sind, absehen und nur das Substantielle derselben ins Auge fassen, und mich dabei auf die erstere Methode, die Abstraction allgemeiner Gesetze durch Induction und ihre Bewährung in der Naturerklärung stützen.

Fragen wir zunächst: woraus schliessen wir die Beseeltheit eines Dinges (das Stattfinden eines fortdauernden einheitlichen Denkprocesses in ihm)? Unserer eigenen Beseeltheit sind wir unmittelbar gewiss, bei Anderen (Menschen und Thieren) schliessen wir sie aus individuellen zweckmässigen Bewegungen.

Ueberall, wo wir wohlgeordnete Zweckmässigkeit auf eine Ursache zurückführen, suchen wir diese Ursache in einem Denkprocesse; eine andere Erklärung haben wir nicht. Das Denken selbst aber kann ich

wenigstens nur für einen Vorgang im Innern der ponderablen Materie halten. Die Unmöglichkeit, das Denken aus räumlichen Bewegungen der Materie zu erklären, wird bei einer unbefangenen Zergliederung der inneren Wahrnehmung wohl Jedermann einleuchten; doch mag die abstracte Möglichkeit einer solchen Erklärung hier zugegeben werden.

Dass auf der Erde Zweckmässigkeit wahrgenommen werde, wird Niemand läugnen. Es fragt sich also: wohin haben wir den Denkprocess, welcher die Ursache dieser Zweckmässigkeit ist, zu verlegen?

Es ist hier nur von bedingten (in begrenzten Zeiten und Räumen stattfindenden) Zwecken die Rede; unbedingte Zwecke finden ihre Erklärung in einem ewigen (nicht in einem Denkprocess erzeugten) Wollen. Die einzige Zweckmässigkeit, deren Ursache wir wahrnehmen, ist die Zweckmässigkeit unserer eigenen Handlungen. Sie entspringt aus dem Wollen der Zwecke und dem Nachdenken über die Mittel.

Finden wir nun einen aus ponderabler Materie bestehenden Körper, in welchem ein System von fortlaufenden Zweck- und Wirkungsbezügen vollkommen zum Abschluss kommt, so können wir zur Erklärung dieser Zweckmässigkeit einen fortwährenden einheitlichen Denkprocess in demselben annehmen; und diese Hypothese wird die wahrscheinlichste sein, wenn 1) die Zweckmässigkeiten nicht schon in Theilen des Körpers zum Abschluss kommen, und 2) kein Grund vorhanden ist, die Ursache derselben in einem grösseren Ganzen, welchem der Körper angehört, zu suchen.

Wenden wir dies auf die in Menschen, Thieren und Pflanzen wahrgenommene Zweckmässigkeit an, so ergibt sich, dass ein Theil dieser Zweckmässigkeiten aus einem Denkprocess im Innern dieser Körper zu erklären ist, ein anderer Theil, die Zweckmässigkeit des Organismus, aber aus einem Denkprocess in einem grösseren Ganzen.

Die Gründe hierfür sind:

1. Die Zweckmässigkeit der organischen Einrichtungen findet nicht in den einzelnen Organismen ihren Abschluss. Die Gründe für die Einrichtung des menschlichen Organismus sind offenbar in der Beschaffenheit der ganzen Erdoberfläche, die organische Natur mit eingerechnet, zu suchen.

2. Die organischen Bewegungen wiederholen sich unzählbar, theils in verschiedenen Individuen neben einander, theils in dem Leben eines Individuums oder eines Geschlechts nach einander. Für die Zweckmässigkeit, welche in ihnen für sich schon liegt, ist also nicht in jedem Fall eine besondere, sondern eine gemeinsame Ursache anzunehmen.

3. Die organischen Einrichtungen erhalten theils (bei Menschen und Thieren) im Leben der einzelnen Individuen, theils (bei Pflanzen und Embryonen) im Leben der einzelnen Geschlechter keine Fortbildung. Die Ursache ihrer Zweckmässigkeit ist also nicht in einem gleichzeitig fortlaufenden Denkprocess zu suchen.

Nach Abzug dieser (organischen) Zweckmässigkeiten bleibt nun bei Menschen und Thieren anerkannter Maassen, bei Pflanzen nach Fechner's Ansicht, noch ein abgeschlossenes System in einander greifender veränderlicher Zweck- und Wirkungsbezüge übrig; und diese Zweckmässigkeit ist aus einem einheitlichen Denkprocesse in ihnen zu erklären.

Diese Folgerungen aus unseren Principien werden durch unsere innere Wahrnehmung bestätigt.

Nach denselben Principien aber müssen wir die Ursache der in den Organismen wahrgenommenen Zweckmässigkeiten in einem einheitlichen Denkprocesse in der Erde suchen aus folgenden Gründen:

- a) Die Zweck- und Wirkungsbezüge in dem organischen Leben auf der Erde zerfallen nicht in einzelne Systeme, sondern es greift Alles in einander. Sie können daher nicht aus mehreren besonderen Denkprocessen in Theilen der Erde erklärt werden.
- b) Es ist, so weit unsere Erfahrung reicht, kein Grund vorhanden, die Ursachen dieser Zweckmässigkeiten in einem grösseren Ganzen zu suchen. Alle Organismen sind nur zum Leben auf der Erde bestimmt. Der Zustand der Erdrinde enthält daher sämtliche (äussere) Gründe ihrer Einrichtung.
- c) Sie sind individuell. Nach Allem, was die Erfahrung darüber lehrt, müssen wir annehmen, dass sie sich auf andern Himmelskörpern nicht wiederholen.
- d) Sie bleiben nicht während des Lebens der Erde. Es treten vielmehr im Lauf desselben immer neue, vollkommene Organismen auf. Wir müssen also die Ursache in einem gleichzeitig zu höheren Stufen fortschreitenden Denkprocesse suchen.

Vom Standpunkt der exacten Naturwissenschaft, der Natur-Erklärung aus Ursachen ist also die Annahme einer Erdseele eine Hypothese zur Erklärung des Daseins und der geschichtlichen Entwicklung der organischen Welt.

„Wenn der Leib der niederen Seele stirbt“, sagt Fechner, „nimmt die obere Seele sie aus ihrem Anschauungsleben in ihr Erinnerungsleben

auf.“ Die Seelen der gestorbenen Geschöpfe sollen also die Elemente bilden für das Seelenleben der Erde.

Die verschiedenen Denkprocesse scheinen sich hauptsächlich zu unterscheiden durch ihren zeitlichen Rhythmus. Wenn die Pflanzen beseelt sind, so müssen Stunden und Tage für sie sein, was für uns Secunden sind; der entsprechende Zeitraum für die Erdseele, wenigstens für ihre Thätigkeit nach aussen, umfasst vielleicht viele Jahrtausende. Soweit die geschichtliche Erinnerung der Menschheit reicht, sind alle Bewegungen der unorganischen Erdrinde wohl noch aus mechanischen Gesetzen zu erklären.

---

### Antinomien.

Thesis.

Antithesis.

Endliches, Vorstellbares.

Unendliches, Begriffssysteme, die an der Grenze des Vorstellbaren liegen.

#### I.

Endliche Zeit- und Raumelemente.

Stetiges.

#### II.

Freiheit, d. h. nicht das Vermögen, absolut anzufangen, sondern zwischen zwei oder mehreren gegebenen Möglichkeiten zu entscheiden.

Determinismus.

Damit trotz völlig bestimmter Gesetze des Wirkens der Vorstellungen Entscheidung durch Willkür möglich sei, muss man annehmen, dass der psychische Mechanismus selbst die Eigenthümlichkeit hat oder wenigstens in seiner Entwicklung annimmt, die Nothwendigkeit derselben herbeizuführen.

Niemand kann beim Handeln die Ueberzeugung aufgeben, dass die Zukunft durch sein Handeln mitbestimmt wird.

#### III.

Ein zeitlich wirkender Gott (Weltregierung).

Ein zeitloser, persönlicher, allwissender, allmächtiger, allgütiger Gott (Vorsehung).

## IV.

## Thesis.

Unsterblichkeit.

Freiheit ist sehr wohl vereinbar mit strenger Gesetzmässigkeit des Naturlaufs. Aber der Begriff eines zeitlosen Gottes ist daneben nicht haltbar. Es muss vielmehr die Beschränkung, welche Allmacht und Allwissenheit durch die Freiheit der Geschöpfe in der oben festgestellten Bedeutung erleiden, aufgehoben werden durch die Annahme eines zeitlich wirkenden Gottes, eines Lenkers der Herzen und Gesicke der Menschen, der Begriff der Vorsehung muss ergänzt und zum Theil ersetzt werden durch den Begriff der Weltregierung.

## Antithesis.

Ein unserer zeitlichen Erscheinung zu Grunde liegendes Ding an sich mit transcendentaler Freiheit, radikalem Bösen, intelligiblem Charakter ausgestattet.

**Allgemeines Verhältniss der Begriffssysteme der Thesis und Antithesis.**

Die Methode, welche Newton zur Begründung der Infinitesimalrechnung anwandte, und welche seit Anfang dieses Jahrhunderts von den besten Mathematikern als die einzige anerkannt worden ist, welche sichere Resultate liefert, ist die Grenzmethode. Die Methode besteht darin, dass man statt eines stetigen Uebergangs von einem Werth einer Grösse zu einem andern, von einem Orte zu einem andern, oder überhaupt von einer Bestimmungsweise eines Begriffs zu einer andern zunächst einen Uebergang durch eine endliche Anzahl von Zwischenstufen betrachtet und dann die Anzahl dieser Zwischenstufen so wachsen lässt, dass die Abstände zweier aufeinanderfolgender Zwischenstufen sämmtlich ins Unendliche abnehmen.

Die Begriffssysteme der Antithesis sind zwar durch negative Prädicate fest bestimmte Begriffe, aber nicht positiv vorstellbar.

Eben deshalb, weil ein genaues und vollständiges Vorstellen dieser Begriffssysteme unmöglich ist, sind sie der directen Untersuchung und Bearbeitung durch unser Nachdenken unzugänglich. Sie können aber als an der Grenze des Vorstellbaren liegend betrachtet werden, d. h. man kann ein innerhalb des Vorstellbaren liegendes Begriffssystem bilden, welches durch blosse Aenderung der Grössenverhältnisse in das gegebene Begriffssystem übergeht. Von den Grössenverhältnissen abgesehen, bleibt das Begriffssystem bei dem Uebergang zur Grenze ungeändert. In dem Grenzfall selbst aber verlieren einige von den Correlativbegriffen des Systems ihre Vorstellbarkeit, und zwar solche, welche die Beziehung zwischen andern Begriffen vermitteln.

## II. Erkenntnisstheoretisches.

### Versuch einer Lehre von den Grundbegriffen der Mathematik und Physik als Grundlage für die Naturerklärung.

Naturwissenschaft ist der Versuch, die Natur durch genaue Begriffe aufzufassen.

Nach den Begriffen, durch welche wir die Natur auffassen, werden nicht bloss in jedem Augenblick die Wahrnehmungen ergänzt, sondern auch künftige Wahrnehmungen als nothwendig, oder, insofern das Begriffssystem dazu nicht vollständig genug ist, als wahrscheinlich vorher bestimmt; es bestimmt sich nach ihnen, was „möglich“ ist (also auch was „nothwendig“ oder wessen Gegentheil unmöglich ist) und es kann der Grad der Möglichkeit (der „Wahrscheinlichkeit“) jedes einzelnen nach ihnen möglichen Ereignisses, wenn sie genau genug sind, mathematisch bestimmt werden.

Tritt dasjenige ein, was nach diesen Begriffen nothwendig oder wahrscheinlich ist, so werden sie dadurch bestätigt, und auf dieser Bestätigung durch die Erfahrung beruht das Zutrauen, welches wir ihnen schenken. Geschieht aber Etwas, was nach ihnen nicht erwartet wird, also nach ihnen unmöglich oder unwahrscheinlich ist, so entsteht die Aufgabe, sie so zu ergänzen oder, wenn nöthig, umzuarbeiten, dass nach dem vervollständigten oder verbesserten Begriffssystem das Wahrgenommene aufhört, unmöglich oder unwahrscheinlich zu sein. Die Ergänzung oder Verbesserung des Begriffssystems bildet die „Erklärung“ der unerwarteten Wahrnehmung. Durch diesen Process wird unsere Auffassung der Natur allmählich immer vollständiger und richtiger, geht aber zugleich immer mehr hinter die Oberfläche der Erscheinungen zurück.

Die Geschichte der erklärenden Naturwissenschaften, soweit wir sie rückwärts verfolgen können, zeigt, dass dieses in der That der Weg ist, auf welchem unsere Naturerkenntniss fortschreitet. Die Begriffssysteme, welche ihnen jetzt zu Grunde liegen, sind durch allmähliche Umwandlung älterer Begriffssysteme entstanden, und die Gründe, welche zu neuen Erklärungsweisen trieben, lassen sich stets auf Widersprüche oder Unwahrscheinlichkeiten, die sich in den älteren Erklärungsweisen herausstellten, zurückführen.

Die Bildung neuer Begriffe, soweit sie der Beobachtung zugänglich ist, geschieht also durch jenen Process.

Es ist nun von Herbart der Nachweis geliefert worden, dass auch die zur Weltauffassung dienenden Begriffe, deren Entstehung wir weder in der Geschichte, noch in unserer eigenen Entwicklung verfolgen können, weil sie uns unvermerkt mit der Sprache überliefert werden, sämmtlich, in soweit sie mehr sind als blosse Formen der Verbindung der einfachen sinnlichen Vorstellungen, aus dieser Quelle abgeleitet werden können und daher nicht (wie nach Kant die Kategorien) aus einer besonderen aller Erfahrung voraufgehenden Beschaffenheit der menschlichen Seele hergeleitet zu werden brauchen.

Dieser Nachweis ihres Ursprungs in der Auffassung des durch die sinnliche Wahrnehmung Gegebenen ist für uns deshalb wichtig, weil nur dadurch ihre Bedeutung in einer für die Naturwissenschaft genügenden Weise festgestellt werden kann...

---

Nachdem der Begriff für sich bestehender Dinge gebildet worden ist, entsteht nun beim Nachdenken über die Veränderung, welche dem Begriffe des für sich Bestehens widerspricht, die Aufgabe, diesen schon bewährten Begriff so weit als möglich aufrecht zu erhalten. Hieraus entspringen gleichzeitig der Begriff der stetigen Veränderung, und der Begriff der Causalität.

Beobachtet wird nur ein Uebergang eines Dinges aus einem Zustand in einen anderen, oder, allgemeiner zu reden, aus einer Bestimmungsweise in eine andere, ohne dass dabei ein Sprung wahrgenommen wird. Bei der Ergänzung der Wahrnehmungen kann man nun entweder annehmen, dass der Uebergang durch eine sehr grosse aber endliche Anzahl für unsere Sinne unmerklicher Sprünge geschieht, oder dass das Ding durch alle Zwischenstufen aus dem einen Zustand in den andern übergeht. Der stärkste Grund für die letztere Auffassung liegt in der Forderung, den schon bewährten Begriff des für sich Bestehens der Dinge soweit als möglich aufrecht zu erhalten. Freilich ist es nicht möglich, sich einen Uebergang durch alle Zwischenstufen wirklich vorzustellen, was aber, wie bemerkt, genau genommen von allen Begriffen gilt.

Zugleich aber wird nach dem früher gebildeten und in der Erfahrung bewährten Begriffe des für sich Bestehens der Dinge geschlossen, das Ding würde bleiben, was es ist, wenn nichts Anderes hinzukäme. Hierin liegt der Antrieb, zu jeder Veränderung eine Ursache zu suchen.

---

## I. Wann ist unsere Auffassung der Welt wahr?

„Wenn der Zusammenhang unserer Vorstellungen dem Zusammenhange der Dinge entspricht.“

Die Elemente unseres Bildes von der Welt sind von den entsprechenden Elementen des abgebildeten Realen gänzlich verschieden. Sie sind etwas in uns; die Elemente des Realen etwas ausser uns. Aber die Verbindungen zwischen den Elementen im Bilde und im Abgebildeten müssen übereinstimmen, wenn das Bild wahr sein soll. Die Wahrheit des Bildes ist unabhängig von dem Grade der Feinheit des Bildes; sie hängt nicht davon ab, ob die Elemente des Bildes grössere oder kleinere Mengen des Realen repräsentiren. Aber die Verbindungen müssen einander entsprechen; es darf nicht im Bilde eine unmittelbare Wirkung zweier Elemente auf einander angenommen werden, wo in der Wirklichkeit nur eine mittelbare stattfindet. In diesem Falle würde das Bild falsch sein und der Berichtigung bedürfen; wird dagegen ein Element des Bildes durch eine Gruppe von feineren Elementen ersetzt, so dass seine Eigenschaften theils aus einfacheren Eigenschaften der feineren Elemente, theils aber aus ihrer Verbindung sich ergeben und also zum Theil begreiflich werden, so wächst dadurch zwar unsere Einsicht in den Zusammenhang der Dinge, aber ohne dass die frühere Auffassung für falsch erklärt werden müsste.

## II. Woraus soll der Zusammenhang der Dinge gefunden werden?

„Aus dem Zusammenhange der Erscheinungen.“

Die Vorstellung von Sinnendingen in bestimmten räumlichen und zeitlichen Verhältnissen ist dasjenige, was beim absichtlichen Nachdenken über die Natur vorgefunden wird oder für dasselbe gegeben ist. Es ist jedoch bekanntlich die Qualität der Merkmale der Sinnendinge, Farbe, Klang, Ton, Geruch, Geschmack, Wärme oder Kälte, etwas lediglich unserer Empfindung Entnommenes, ausser uns nicht Existirendes.

Dasjenige, woraus der Zusammenhang der Dinge erkannt werden muss, sind also quantitative Verhältnisse, die räumlichen und zeitlichen Verhältnisse der Sinnendinge und die Intensitätsverhältnisse der Merkmale und ihrer Qualitätsunterschiede.

Aus dem Nachdenken über den beobachteten Zusammenhang dieser Grössenverhältnisse muss sich die Erkenntniss des Zusammenhangs der Dinge ergeben.

---

## Causalität.

I. Was ein Agens zu bewirken strebt, muss durch den Begriff des Agens bestimmt sein; seine Action kann von nichts Anderem als von seinem eigenen Wesen abhängen.

II. Dieser Forderung wird genügt, wenn das Agens sich selbst zu erhalten oder herzustellen strebt.

III. Eine solche Action ist aber nicht denkbar, wenn das Agens ein Ding, ein Seiendes ist, sondern nur, wenn es ein Zustand oder ein Verhältniss ist. Findet ein Streben, etwas zu erhalten oder herzustellen Statt, so müssen auch Abweichungen, und zwar in verschiedenen Graden, von diesem Etwas möglich sein; und es wird in der That, in sofern dieser Bestrebung andere Betreibungen widerstreiten, nur möglichst nahe erhalten oder hergestellt werden. Es giebt aber keine Grade des Seins, eine gradweise Verschiedenheit ist nur von Zuständen oder Verhältnissen denkbar. Wenn also ein Agens sich selbst zu erhalten oder herzustellen strebt, so muss es ein Zustand oder ein Verhältniss sein.

IV. Eine solche Action eines Zustandes kann selbstredend nur auf solche Dinge stattfinden, die eines gleichen Zustandes fähig sind. Auf welche von diesen Dingen sie aber stattfindet und ob sie überhaupt stattfindet, kann aus dem Begriff des Agens nicht geschlossen werden.\*)

---

\*) Diese Sätze gelten nur, wenn einem einfachen Realgrund das Wirken zugeschrieben werden soll.

Wenn zwei Dinge *a* und *b* durch einen äusseren Grund in Verbindung treten, so kann entweder an die Verbindung, das Verbundensein, selbst, oder auch an die Veränderung ihres Grades, eine Folge *c* geknüpft sein. Die einfachste Annahme ist, dass die Folge *c* an das Verbundensein geknüpft ist.

Es ist unnöthig, diese Betrachtungen weiter fortzuführen. Ihr Princip besteht darin, dass man den Satz festhält: „Was ein Agens zu bewirken strebt, muss durch den Begriff des Agens bestimmt sein“, diesen Satz aber nicht, wie Leibnitz oder Spinoza auf Wesen mit einer Mannigfaltigkeit von Bestimmungen, sondern auf Realgründe von möglichst grösster Einfachheit anwendet.

---

Man pflegt im Deutschen sowohl *actio* als *effectus* durch Wirkung zu übersetzen. Da das Wort in der letzteren Bedeutung viel häufiger vorkommt, so entsteht leicht eine Undeutlichkeit, wenn man es für *actio* braucht, wie z. B. bei der gebräuchlichen Uebersetzung von „*actio aequalis est reactioni*“, „*principium actionis minimae*“. Kant sucht sich dadurch zu helfen, dass er neben Wirkung, Wechselwirkung, den lateinischen Ausdruck *actio*, *actio mutua* in Klammern hinzufügt. Man könnte vielleicht sagen: „die Kraft ist gleich der Gegenkraft“, „Satz vom kleinsten Kraftaufwande“. Da aber in der That uns ein einfacher Ausdruck für *agere*, ein auf etwas Anderes gerichtetes Streben, fehlt, so möge mir der Gebrauch des Fremdworts gestattet sein.

Sehr richtig bemerkt Kant, dass durch die Zergliederung des Begriffs von einem Dinge weder gefunden werden könne, dass es sei, noch dass es die Ursache von etwas Anderem sei, dass also die Begriffe des Seins und der Causalität nicht analytisch seien und nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Wenn er aber später sich zu der Annahme genöthigt glaubt, dass der Causalbegriff aus einer aller Erfahrung vorausgehenden Beschaffenheit des erkennenden Subjects stamme, und ihn deshalb zu einer blossen Regel der Zeitfolge stempelt, durch welche in der Erfahrung mit jeder Wahrnehmung als Ursache jede beliebige andere als Wirkung verknüpft werden könnte, so heisst dies das Kind mit dem Bade ausschütten. (Freilich müssen wir die Causalitätsverhältnisse aus der Erfahrung entnehmen; aber wir dürfen nicht darauf verzichten, unsere Auffassung dieser Erfahrungsthatsachen durch Nachdenken zu berichtigen und zu ergänzen.)

---

Das Wort Hypothese hat jetzt eine etwas andere Bedeutung als bei Newton. Man pflegt jetzt unter Hypothese Alles zu den Erscheinungen Hinzugedachte zu verstehen.

Newton war weit entfernt von dem ungereimten Gedanken, als könne die Erklärung der Erscheinungen durch Abstraction gewonnen werden.

Newton: *Et haec de deo; de quo utique ex phaenomenis disserere ad philosophiam experimentalem pertinet. Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex phaenomenis nondum potui deducere, et Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phaenomenis non deducitur, Hypothesis vocanda est.*

Arago, *Oeuvres complètes* T. 3. 505:

Une fois, une seule fois Laplace s'élança dans la région des conjectures. Sa conception ne fut alors rien moins qu'une cosmogonie.

Laplace auf Napoleon's Frage, weshalb in seiner *Méc. cél.* der Name Gottes nicht vorkomme: *Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.*

---

Die Unterscheidung, welche Newton zwischen Bewegungsgesetzen oder Axiomen und Hypothesen macht, scheint mir nicht haltbar. Das Trägheitsgesetz ist die Hypothese: Wenn ein materieller Punkt allein in der Welt vorhanden wäre und sich im Raum mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegte, so würde er diese Geschwindigkeit beständig behalten.

### III. Naturphilosophie.

#### I. Molecularmechanik.

Die freie Bewegung eines Systems materieller Punkte  $m_1, m_2 \dots$  mit den rechtwinkligen Coordinaten  $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots$ , auf welche parallel den drei Axen die Kräfte  $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; \dots$  wirken, geschieht den Gleichungen gemäss:

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i.$$

Dies Gesetz kann auch so ausgesprochen werden: die Beschleunigungen bestimmen sich so, dass

$$\sum m_i \left( \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z_i}{dt^2} - \frac{Z_i}{m_i} \right)^2 \right)$$

ein Minimum wird; denn diese Function der Beschleunigungen nimmt ihren kleinsten Werth 0 an, wenn die Beschleunigungen sämmtlich den Gleichungen (1) gemäss bestimmt werden, d. h. die Grössen  $\frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i} \dots$  sämmtlich = 0 sind, und sie nimmt auch nur dann einen

Minimumwerth an; denn wäre eine dieser Grössen, z. B.  $\frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{X_i}{m_i}$

nicht gleich Null, so könnte man  $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$  immer stetig so ändern, dass der absolute Werth dieser Grösse und folglich ihr Quadrat abnähme. Die Function würde also dann kleiner werden, wenn man zugleich alle übrigen Beschleunigungen ungeändert liesse.

Diese Function der Beschleunigungen unterscheidet sich von

$$\begin{aligned} & \sum m_i \left( \left( \frac{d^2 x_i}{dt^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right)^2 \right) \\ & - 2 \sum \left( X_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + Y_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + Z_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

nur um eine Constante, d. h. eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse.

Wenn die Kräfte nur von Anziehungen und Abstossungen zwischen den Punkten herrühren, welche Functionen der Entfernung sind, und der  $\iota$ te Punkt und der  $\iota'$ te Punkt sich in der Entfernung  $r$  mit der Kraft  $f_{\iota,\iota'}(r)$  abstossen oder mit der Kraft  $-f_{\iota,\iota'}(r)$  anziehen, lassen sich bekanntlich die Componenten der Kräfte ausdrücken durch die partiellen Derivirten einer Function von den Coordinaten sämmtlicher Punkte

$$P = \sum_{\iota,\iota'} F_{\iota,\iota'}(r_{\iota,\iota'}),$$

worin  $F_{\iota,\iota'}(r)$  eine Function bedeutet, deren Derivirte  $f_{\iota,\iota'}(r)$ , und für  $\iota$  und  $\iota'$  je zwei verschiedene Indices zu setzen sind.

Substituirt man diese Werthe der Componenten

$$X_{\iota} = \frac{\partial P}{\partial x_{\iota}}, \quad Y_{\iota} = \frac{\partial P}{\partial y_{\iota}}, \quad Z_{\iota} = \frac{\partial P}{\partial z_{\iota}}$$

in obiger Function der Beschleunigungen und multiplicirt dieselbe mit  $\frac{dt^2}{4}$ , wodurch die Lage ihrer Maxima und Minima nicht geändert wird, so erhält man einen Ausdruck, der sich von

$$\frac{1}{4} \sum \left( \left( d \frac{dx_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dy_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dz_{\iota}}{dt} \right)^2 \right) - P_{(t+dt)}$$

nur um eine von den Beschleunigungen unabhängige Grösse unterscheidet. Wenn die Lage und die Geschwindigkeiten der Punkte zur Zeit  $t$  gegeben sind, so bestimmt sich diese Lage zur Zeit  $t + dt$  so, dass diese Grösse möglichst klein wird. Es findet demnach ein Streben statt, diese Grösse möglichst klein zu machen.

Dieses Gesetz kann man nun aus Actionen erklären, welche die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks möglichst klein zu machen streben, wenn man annimmt, dass einander widerstreitende Bestrebungen sich so ausgleichen, dass die Summe der Grössen, welche die einzelnen Actionen möglichst klein zu erhalten streben, ein Minimum wird.

Nimmt man an, dass die Massen der Punkte  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sich verhalten wie die ganzen Zahlen  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , so dass  $m_{\iota} = k_{\iota}\mu$ , so besteht der Ausdruck, welcher möglichst klein wird, aus der Summe der Grössen

$$\frac{\mu}{4} \left( \left( d \frac{dx_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dy_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dz_{\iota}}{dt} \right)^2 \right)$$

für sämmtliche Massentheilchen  $\mu$  und der Grösse  $-P_{t+dt}$ . Wenn man also mit Gauss die Grösse

$$\left( d \frac{dx_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dy_{\iota}}{dt} \right)^2 + \left( d \frac{dz_{\iota}}{dt} \right)^2$$

als Maass der Abweichung des Bewegungszustandes der Masse  $\mu$  zur Zeit  $t + dt$  von ihrem Bewegungszustand zur Zeit  $t$  betrachtet, so er giebt die Zerlegung der Gesamttaction in Bezug auf jede Masse eine Action, welche die Abweichung ihres Bewegungszustandes zur Zeit  $t + dt$  von ihrem Bewegungszustande zur Zeit  $t$  möglichst klein zu machen strebt, oder ein Streben ihres Bewegungszustandes, sich zu erhalten, und ausserdem eine Action, welche die Grösse  $-P$  möglichst klein zu erhalten strebt.

Diese letztere Action lässt sich zerlegen in Bestrebungen, die einzelnen Glieder der Summe  $\sum_{i,i'} F_{i,i'}(r_{i,i'})$  möglichst klein zu erhalten, d. h. in Anziehungen und Abstossungen zwischen je zwei Punkten, und dies würde zu der gewöhnlichen Erklärung der Bewegungsgesetze aus dem Gesetz der Trägheit und Anziehungen und Abstossungen zurückführen; sie lässt sich aber bei allen uns bekannten Naturkräften auch auf Kräfte, welche zwischen benachbarten Raumelementen thätig sind, zurückführen, wie im folgenden Artikel an der Gravitation erläutert werden soll.

## 2. Neue mathematische Principien der Naturphilosophie.\*)

Ogleich die Ueberschrift dieses Aufsatzes bei den meisten Lesern schwerlich ein günstiges Vorurtheil erwecken wird, so schien sie mir doch die Tendenz desselben am besten auszudrücken. Sein Zweck ist, jenseits der von Galiläi und Newton gelegten Grundlagen der Astronomie und Physik ins Innere der Natur zu dringen. Für die Astronomie kann diese Speculation freilich unmittelbar keinen praktischen Nutzen haben, aber ich hoffe, dass dieser Umstand auch in den Augen der Leser dieses Blattes dem Interesse keinen Eintrag thun wird. . . .

Der Grund der allgemeinen Bewegungsgesetze für Ponderabilien, welche sich im Eingange zu Newton's Principien zusammengestellt finden, liegt in dem inneren Zustande derselben. Versuchen wir aus unserer eigenen inneren Wahrnehmung nach der Analogie auf denselben zu schliessen. Es treten in uns fortwährend neue Vorstellungsmassen auf, welche sehr rasch aus unserm Bewusstsein wieder verschwinden. Wir beobachten eine stetige Thätigkeit unserer Seele. Jedem Act derselben liegt etwas Bleibendes zu Grunde, welches sich bei besonderen Anlässen (durch die Erinnerung) als solches kundgiebt, ohne einen dauernden Einfluss auf die Erscheinungen auszuüben. Es tritt also fortwährend (mit jedem Denkact) etwas Bleibendes in unsere Seele ein, welches aber auf die Erscheinungswelt keinen dauernden

\*) Gefunden am 1. März 1853.

Einfluss ausübt. Jedem Act unserer Seele liegt also etwas Bleibendes zu Grunde, welches mit diesem Act in unsere Seele eintritt, aber in demselben Augenblick aus der Erscheinungswelt völlig verschwindet.

Von dieser Thatsache geleitet, mache ich die Hypothese, dass der Weltraum mit einem Stoff erfüllt ist, welcher fortwährend in die ponderablen Atome strömt und dort aus der Erscheinungswelt (Körperwelt) verschwindet.

Beide Hypothesen lassen sich durch die Eine ersetzen, dass in allen ponderablen Atomen beständig Stoff aus der Körperwelt in die Geisteswelt eintritt. Die Ursache, weshalb der Stoff dort verschwindet, ist zu suchen in der unmittelbar vorher dort gebildeten Geistessubstanz, und die ponderablen Körper sind hiernach der Ort, wo die Geisteswelt in die Körperwelt eingreift\*).

Die Wirkung der allgemeinen Gravitation, welche nun zunächst aus dieser Hypothese erklärt werden soll, ist bekanntlich in jedem Theil des Raumes völlig bestimmt, wenn die Potentialfunction  $P$  sämmtlicher ponderablen Massen für diesen Theil des Raumes gegeben ist, oder was dasselbe ist, eine solche Function  $P$  des Ortes, dass die im Innern einer geschlossenen Fläche  $S$  enthaltenen ponderablen Massen

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial P}{\partial p} dS \text{ sind.}$$

Nimmt man nun an, dass der raumerfüllende Stoff eine incompressible homogene Flüssigkeit ohne Trägheit sei, und dass in jedes ponderable Atom in gleichen Zeiten stets gleiche, seiner Masse proportionale Mengen einströmen, so wird offenbar der Druck, den das ponderable Atom erfährt, (der Geschwindigkeit der Stoffbewegung an dem Orte des Atoms proportional sein(?))

Es kann also die Wirkung der allgemeinen Gravitation auf ein ponderables Atom durch den Druck des raumerfüllenden Stoffes in der unmittelbaren Umgebung desselben ausgedrückt und von demselben abhängig gedacht werden.

Aus unserer Hypothese folgt nothwendig, dass der raumerfüllende Stoff die Schwingungen fortpflanzen muss, welche wir als Licht und Wärme wahrnehmen.

Betrachten wir einen einfach polarisirten Strahl, bezeichnen durch  $x$  die Entfernung eines unbestimmten Punktes desselben von einem

\*) In jedes ponderable Atom tritt in jedem Augenblick eine bestimmte, der Gravitationskraft proportionale Stoffmenge ein und verschwindet dort.

Es ist die Consequenz der auf Herbart'schem Boden stehenden Psychologie, dass nicht der Seele, sondern jeder einzelnen in uns gebildeten Vorstellung Substantialität zukomme.

festen Anfangspunkte, durch  $y$  dessen Elongation zur Zeit  $t$ , so muss, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwingungen im von Ponderabilien freien Raum unter allen Umständen sehr nahe constant (gleich  $\alpha$ ) ist, die Gleichung:

$$y = f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

wenigstens sehr nahe erfüllt werden.

Wäre sie streng erfüllt, so müsste

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \alpha \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\tau$$

sein; offenbar kann aber unserer Erfahrung auch durch die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha \alpha \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \varphi(t - \tau) d\tau$$

genügt werden, wenn auch  $\varphi(t - \tau)$  nicht für alle positiven Werthe von  $t - \tau$  gleich 1 ist (mit wachsendem  $t - \tau$  ins Unendliche abnimmt), wofern es nur für einen hinreichend grossen Zeitraum sehr wenig von 1 verschieden bleibt. . . .

Man drücke die Lage der Stoffpunkte zu einer bestimmten Zeit  $t$  durch ein rechtwinkliges Coordinatensystem aus, und es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punktes  $O$   $x, y, z$ . Aehnlicher Weise seien, ebenfalls in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, die Coordinaten des Punktes  $O'$   $x', y', z'$ . Es sind dann  $x', y', z'$  Functionen von  $x, y, z$  und  $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$  wird gleich einem homogenen Ausdruck zweiten Grades von  $dx, dy, dz$ . Nach einem bekannten Theorem lassen sich nun die linearen Ausdrücke von  $dx, dy, dz$

$$\begin{aligned} \alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz &= ds_1 \\ \alpha_2 dx + \beta_2 dy + \gamma_2 dz &= ds_2 \\ \alpha_3 dx + \beta_3 dy + \gamma_3 dz &= ds_3 \end{aligned}$$

stets und nur auf Eine Weise so bestimmen, dass

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = G_1^2 ds_1^2 + G_2^2 ds_2^2 + G_3^2 ds_3^2$$

wird, während

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2.$$

Die Grössen  $G_1 - 1, G_2 - 1, G_3 - 1$  heissen dann die Hauptdilatationen des Stofftheilchens in  $O$  beim Uebergange von der ersteren Form zur letzteren; ich bezeichne sie durch  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Ich nehme nun an, dass aus der Verschiedenheit der früheren Formen des Stofftheilchens von seiner Form zur Zeit  $t$  eine Kraft resultirt, welche diese zu verändern strebt, dass der Einfluss einer früheren Form (caeteris paribus) desto geringer wird, je länger vor  $t$  sie statt-

fand, und zwar so, dass von einer gewissen Grenze an alle früheren vernachlässigt werden können. Ich nehme ferner an, dass diejenigen Zustände, welche noch einen merklichen Einfluss äussern, so wenig von demjenigen zur Zeit  $t$  verschieden sind, dass die Dilatationen als unendlich klein betrachtet werden können. Die Kräfte, welche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  zu verkleinern streben, können dann als lineare Functionen von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  angesehen werden; und zwar erhält man wegen der Homogenität des Aethers für das Gesamtmoment dieser Kräfte (die Kraft, welche  $\lambda_1$  zu verkleinern strebt, muss eine Function von  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sein, welche unverändert bleibt, wenn man  $\lambda_2$  mit  $\lambda_3$  vertauscht, und die übrigen Kräfte müssen aus ihr hervorgehen, wenn  $\lambda_2$  mit  $\lambda_1, \lambda_3$  mit  $\lambda_1$  vertauscht wird) folgenden Ausdruck:

$\delta\lambda_1(a\lambda_1 + b\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_2(b\lambda_1 + a\lambda_2 + b\lambda_3) + \delta\lambda_3(b\lambda_1 + b\lambda_2 + a\lambda_3)$   
 oder mit etwas veränderter Bedeutung der Constanten

$$\begin{aligned} & \delta\lambda_1(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_1) + \delta\lambda_2(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_2) \\ & \quad + \delta\lambda_3(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + b\lambda_3) \\ & = \frac{1}{2} \delta(a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)). \end{aligned}$$

Man kann nun das Kraftmoment, welches die Form des unendlich kleinen Stofftheilchens in  $O$  zu verändern strebt, als resultirend betrachten aus Kräften, welche die Länge der in  $O$  endenden Linien-elemente zu verändern streben. Man gelangt dann zu folgendem Wirkungsgesetz: Bezeichnet  $dV$  das Volumen eines unendlich kleinen Stofftheilchens in  $O$  zur Zeit  $t$ ,  $dV'$  das Volumen desselben Stofftheilchens zur Zeit  $t'$ , so wird die aus der Verschiedenheit beider Stoffzustände herrührende Kraft, welche  $ds$  zu verlängern strebt, durch

$$a \frac{dV - dV'}{dV} + b \frac{ds - ds'}{ds}$$

ausgedrückt.

Der erste Theil dieses Ausdrucks rührt von der Kraft her, mit welcher ein Stofftheilchen einer Volumänderung ohne Formänderung, der zweite von der Kraft, mit welcher ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Es ist nun kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass die Wirkungen beider Ursachen nach demselben Gesetz mit der Zeit sich änderten; fassen wir also die Wirkungen sämmtlicher früheren Formen eines Stofftheilchens auf die Aenderung des Linienelements  $ds$  zur Zeit  $t$  zusammen, so wird der Werth von  $\frac{\delta ds}{\delta t}$ , welchen sie zu bewirken streben,

$$= \int_{-\infty}^t \frac{dV' - dV}{dV} \psi(t - t') \delta t' + \int_{-\infty}^t \frac{ds' - ds}{ds} \varphi(t - t') \delta t'.$$

Wie müssen nun die Functionen  $\psi$  und  $\varphi$  beschaffen sein, damit Gravitation, Licht und strahlende Wärme durch den Raumstoff vermittelt werde?

Die Wirkungen ponderabler Materie auf ponderable Materie sind:

- 1) Anziehungs- und Abstossungskräfte umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung.
- 2) Licht und strahlende Wärme.

Beide Classen von Erscheinungen lassen sich erklären, wenn man annimmt, dass den ganzen unendlichen Raum ein gleichartiger Stoff erfüllt, und jedes Stofftheilchen unmittelbar nur auf seine Umgebung einwirkt.

Das mathematische Gesetz, nach welchem dies geschieht, kann zerfällt gedacht werden

- 1) in den Widerstand, mit welchem ein Stofftheilchen einer Volumänderung, und
- 2) in den Widerstand, mit welchem ein physisches Linienelement einer Längenänderung widerstrebt.

Auf dem ersten Theil beruht die Gravitation und die electrostatische Anziehung und Abstossung, auf dem zweiten die Fortpflanzung des Lichts und der Wärme und die electrodynamische oder magnetische Anziehung und Abstossung.

### 3. Gravitation und Licht.

Die Newton'sche Erklärung der Fallbewegungen und der Bewegungen der Himmelskörper besteht in der Annahme folgender Ursachen:

1. Es existirt ein unendlicher Raum mit den Eigenschaften, welche die Geometrie ihm beilegt, und ponderable Körper, welche in ihm ihren Ort nur stetig verändern.

2. In jedem ponderablen Punkte existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache, vermöge der er eine bestimmte Bewegung hat (Materie in bestimmtem Bewegungszustande). Das Maass dieser Ursache ist die Geschwindigkeit\*).

\*) Jeder materielle Körper würde, wenn er sich im Raum allein befände, entweder seinen Ort in demselben nicht verändern oder mit unveränderlicher Geschwindigkeit in gerader Linie durch denselben sich bewegen.

Dieses Bewegungsgesetz kann nicht aus dem Princip des zureichenden Grundes erklärt werden. Dass der Körper seine Bewegung fortsetzt, muss eine Ursache haben, welche nur in dem inneren Zustand der Materie gesucht werden kann.

Die hier zu erklärenden Erscheinungen führen noch nicht auf die Annahme verschiedener Massen der ponderablen Körper.

3. In jedem Punkt des Raumes existirt in jedem Augenblicke eine nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Kraft), welche jedem dort befindlichen ponderablen Punkte eine bestimmte, und zwar allen dieselbe Bewegung mittheilt, die sich mit der Bewegung, die er schon hat, geometrisch zusammensetzt.

4. In jedem ponderablen Punkt existirt eine der Grösse nach bestimmte Ursache (absolute Schwerkraft), vermöge welcher in jedem Punkte des Raumes eine dem Quadrat der Entfernung von diesem ponderablen Punkte umgekehrt und seiner Schwerkraft direct proportionale beschleunigende Kraft stattfindet, die sich mit allen andern dort stattfindenden beschleunigenden Kräften geometrisch zusammensetzt\*).

Die nach Grösse und Richtung bestimmte Ursache (beschleunigende Schwerkraft), welche nach 3. in jedem Punkte des Raumes stattfindet, suche ich in der Bewegungsform eines durch den ganzen unendlichen Raum stetig verbreiteten Stoffes, und zwar nehme ich an, dass die Richtung der Bewegung der Richtung der aus ihr zu erklärenden Kraft gleich, und ihre Geschwindigkeit der Grösse der Kraft proportional sei. Dieser Stoff kann also vorgestellt werden als ein physischer Raum, dessen Punkte sich in dem geometrischen bewegen.

Nach dieser Annahme müssen alle von ponderablen Körpern durch den leeren Raum auf ponderable Körper ausgeübte Wirkungen durch diesen Stoff fortgepflanzt werden. Es müssen also auch die Bewegungsformen, in denen das Licht und die Wärme besteht, welche die Himmelskörper einander zusenden, Bewegungsformen dieses Stoffes sein. Diese beiden Erscheinungen, Gravitation und Lichtbewegung durch den leeren Raum, aber sind die einzigen, welche bloss aus Bewegungen dieses Stoffes erklärt werden müssten.

Ich nehme nun an, dass die wirkliche Bewegung des Stoffes im leeren Raum zusammengesetzt ist aus der Bewegung, welche zur Erklärung der Gravitation, und aus der, welche zur Erklärung des Lichtes angenommen werden muss.

Die weitere Entwicklung dieser Hypothese zerfällt in zwei Theile, insofern aufzusuchen sind

---

\*) Derselbe ponderable Punkt würde an zwei verschiedenen Orten Bewegungsänderungen erleiden, deren Richtung mit der Richtung der Kräfte zusammenfällt, und deren Grössen sich verhalten wie die Kräfte.

Die Kraft, dividirt durch die Bewegungsänderung, giebt daher bei demselben ponderablen Punkt stets denselben Quotienten. Dieser Quotient ist bei verschiedenen ponderablen Punkten verschieden und heisst ihre Masse.

1. Die Gesetze der Stoffbewegungen, welche zur Erklärung der Erscheinungen angenommen werden müssen.

2. Die Ursachen, aus welchen diese Bewegungen erklärt werden können.

Das erste Geschäft ist ein mathematisches, das zweite ein metaphysisches. In Bezug auf letzteres bemerke ich im Voraus, dass als Ziel desselben nicht die Erklärung aus Ursachen, welche die Entfernung zweier Stoffpunkte zu verändern streben, zu betrachten sein wird. Diese Erklärungsmethode durch Anziehungs- und Abstossungskräfte verdankt ihre allgemeine Anwendung in der Physik nicht einer unmittelbaren Evidenz (besonderen Vernunftgemässheit), noch, von Electricität und Schwere abgesehen, ihrer besonderen Leichtigkeit, sondern vielmehr dem Umstande, dass das Newton'sche Anziehungsgesetz gegen die Meinung des Entdeckers so lange für ein nicht weiter zu erklärendes gegolten hat\*).

I. Gesetze der Stoffbewegung, welche nach unserer Annahme die Gravitations- und Lichterscheinungen verursacht.

Indem ich die Lage eines Raumpunktes durch rechtwinklige Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  ausdrücke, bezeichne ich die dort parallel denselben zur Zeit  $t$  stattfindenden Geschwindigkeitscomponenten der Bewegung, welche die Gravitationserscheinungen verursacht, durch  $u_1, u_2, u_3$ , der Bewegung, welche die Lichterscheinungen verursacht, durch  $w_1, w_2, w_3$ , der wirklichen Bewegung durch  $v_1, v_2, v_3$ , so dass  $v = u + w$ . Wie sich aus den Bewegungsgesetzen selbst ergeben wird, behält der Stoff, wenn er in Einem Zeitpunkt überall gleich dicht ist, stets allenthalben dieselbe Dichtigkeit, ich werde diese daher zur Zeit  $t$  überall = 1 annehmen.

**a. Bewegung, welche nur Gravitationserscheinungen verursacht.**

Die Schwerkraft ist in jedem Punkte durch die Potentialfunction  $V$  bestimmt, deren partielle Differentialquotienten  $\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \frac{\partial V}{\partial x_3}$  die Componenten der Schwerkraft sind, und dieses  $V$  ist wieder bestimmt durch folgende Bedingungen (abgesehen von einer hinzuzufügaren Constanten):

---

\*) Newton says: „That gravity should be innate, inherent, and essential to matter, so that one body may act upon another at a distance through a vacuum, without the mediation of anything else, by and through which their action and force may be conveyed from one to another, is to me so great an absurdity, that I believe no man who has in philosophical matters a competent faculty of thinking can ever fall into it.“ See the third letter to Bentley.

1.  $dx_1 dx_2 dx_3 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \right)$  ist ausserhalb der anziehenden

Körper = 0 und hat für jedes ponderable Körperelement einen unveränderlichen Werth. Dieser ist das Product aus  $-4\pi$  in die absolute Grösse der Anziehungskraft, welche nach der Attractionstheorie demselben beigelegt werden muss, und durch  $dm$  bezeichnet werden soll.

2. Wenn alle anziehenden Körper sich innerhalb eines endlichen Raumes befinden, sind in unendlicher Entfernung  $r$  von einem Punkt dieses Raumes  $r \frac{\partial V}{\partial x_1}$ ,  $r \frac{\partial V}{\partial x_2}$ ,  $r \frac{\partial V}{\partial x_3}$  unendlich klein.

Nach unserer Hypothese ist nun  $\frac{\partial V}{\partial x} = u$  und folglich

$$dV = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3.$$

Dieses schliesst die Bedingungen ein:

$$(1) \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$(2) \quad \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = -4\pi dm,$$

$$(3) \quad ru_1 = 0, \quad ru_2 = 0, \quad ru_3 = 0, \quad \text{für } r = \infty.$$

Umgekehrt sind auch die Grössen  $u$ , wenn sie diesen Bedingungen genügen, den Componenten der Schwerkraft gleich. Denn die Bedingungen (1) enthalten die Möglichkeit einer Function  $U$ , von welcher das Differential  $dU = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$  und also die Differentialquotienten  $\frac{\partial U}{\partial x} = u$ , und die übrigen ergeben dann  $U = V + \text{const.}^*$ )

\*) Diese Function  $U$  ist also durch die Erfahrung (aus den relativen Bewegungen) mittelst der allgemeinen Bewegungsgesetze gegeben, aber nur abgesehen von einer linearen Function der Coordinaten, weil wir nur relative Bewegungen beobachten können.

Die Bestimmung dieser Function gründet sich auf folgenden mathematischen Satz: Eine Function  $V$  des Ortes ist innerhalb eines endlichen Raumes bestimmt (abgesehen von einer Constanten), wenn sie nicht längs einer Fläche unstetig sein soll und für alle Elemente desselben  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3$ , an der Grenze entweder  $V$  oder deren Differentialquotient für eine Ortsänderung nach Innen senkrecht auf die Begrenzung gegeben ist. Wobei zu bemerken:

1. Wird dieser Differentialquotient im Begrenzungselement  $ds$  durch  $\frac{\partial V}{\partial p}$  bezeichnet, so muss in letzterem Falle  $\int \sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx_1 dx_2 dx_3$  durch den ganzen Raum  $= - \int \frac{\partial V}{\partial p} ds$  durch dessen Begrenzung sein; übrigens aber können in beiden Fällen sämtliche Bestimmungsstücke willkürlich angenommen werden und sind daher zur Bestimmung nothwendig.

**b. Bewegung, welche nur Lichterscheinungen verursacht.**

Die Bewegung, welche im leeren Raum zur Erklärung der Lichterscheinungen angenommen werden muss, kann betrachtet werden (zufolge eines Theorems) als zusammengesetzt aus ebenen Wellen, d. h. aus solchen Bewegungen, wo längs jeder Ebene einer Schaar paralleler Ebenen (Wellenebenen) die Bewegungsform constant ist. Jedes dieser Wellensysteme besteht dann (der Erfahrung nach) aus Bewegungen parallel der Wellenebene, die sich mit einer für alle Bewegungsformen (Arten des Lichts) gleichen constanten Geschwindigkeit  $c$  senkrecht zur Wellenebene fortpflanzen.

Sind für ein solches Wellensystem  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  rechtwinklige Coordinaten eines Raumpunktes, die erste senkrecht, die andern parallel zur Wellenebene,  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  die ihnen parallelen Geschwindigkeitscomponenten in diesem Punkte zur Zeit  $t$ , so hat man:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi_2} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \xi_3} = 0.$$

Der Erfahrung nach ist erstlich:

$$\omega_1 = 0,$$

zweitens ist die Bewegung zusammengesetzt aus einer nach der positiven und einer nach der negativen Seite der Wellenebene mit der Geschwindigkeit  $c$  fortschreitenden Bewegung. Sind  $\omega'$  die Geschwindigkeitscomponenten der ersteren,  $\omega''$  die der letzteren, so bleiben die  $\omega'$  un geändert, wenn  $t$  um  $dt$  und  $\xi_1$  um  $cdt$  wächst, die  $\omega''$ , wenn  $t$  um  $dt$  und  $\xi_1$  um  $-cdt$  wächst, und man hat  $\omega = \omega' + \omega''$ . Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\partial \omega'}{\partial t} + c \frac{\partial \omega'}{\partial \xi_1}\right) dt = 0, \quad \left(\frac{\partial \omega''}{\partial t} - c \frac{\partial \omega''}{\partial \xi_1}\right) dt = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1 \partial t} = cc \frac{\partial^2 \omega'}{\partial \xi_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega''}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1 \partial t} = cc \frac{\partial^2 \omega''}{\partial \xi_1^2}$$

also

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2}.$$

2. Für ein Raumelement, wo  $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  unendlich gross wird, ist das Product beider durch  $-\int \frac{\partial V}{\partial p} ds$  in Bezug auf die Begrenzung dieses Elements zu ersetzen.

3. Wenn nur innerhalb eines endlichen Raumes  $\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  einen von 0 verschiedenen Werth hat, so kann die Grenzbedingung dadurch ersetzt werden, dass in unendlicher Entfernung  $R$  von einem Punkte dieses Raumes  $R \frac{\partial V}{\partial x}$  unendlich klein sein soll.

Diese Gleichungen geben folgende symmetrische:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial \xi_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = cc \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi_3^2} \right),$$

welche, ausgedrückt durch das ursprüngliche Coordinatensystem, in Gleichungen von derselben Form übergehen, d. h. in

$$(1) \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = cc \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} \right).$$

Diese Gleichungen gelten für jede den Punkt  $(x_1, x_2, x_3)$  zur Zeit  $t$  durchschreitende ebene Welle und folglich auch für die aus allen zusammengesetzte Bewegung.

**c. Bewegung, welche beiderlei Erscheinungen verursacht.**

Aus den gefundenen Bedingungen für  $u$  und  $w$  fließen folgende Bedingungen für  $v$  oder Gesetze der Stoffbewegung im leeren Raume:

$$(1) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

$$(\partial_i^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)) \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = 0$$

$$(II) \quad (\partial_i^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)) \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$(\partial_i^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)) \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = 0,$$

wie sich leicht ergibt, wenn man die Operationen ausführt.

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung eines Stoffpunktes nur abhängt von den Bewegungen in den angrenzenden Raum- und Zeittheilen, und ihre (vollständigen) Ursachen in den Einwirkungen der Umgebung gesucht werden können.

Die Gleichung (I) beweist unsere frühere Behauptung, dass bei der Stoffbewegung die Dichtigkeit ungeändert bleibe; denn

$$\left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 dt,$$

welches zufolge dieser Gleichung  $= 0$  ist, drückt die in das Raumelement  $dx_1 dx_2 dx_3$  im Zeitelement  $dt$  einströmende Stoffmenge aus, und die in ihm enthaltene Stoffmenge bleibt daher constant.

Die Bedingungen (II) sind identisch mit der Bedingung, dass

$$\left( \partial_i^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) \right) (v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3)$$

gleich einem vollständigen Differential  $dW$  sei. Nun ist:

$$(\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2))(w_1 dx_1 + w_2 dx_2 + w_3 dx_3) = 0$$

und folglich

$$\begin{aligned} dW &= (\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2))(u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3) \\ &= (\partial_t^2 - cc(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2))dV \end{aligned}$$

oder, da  $(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)dV = 0$ ,

$$= d \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

. . . . .

**d. Gemeinschaftlicher Ausdruck für die Gesetze der Stoffbewegung und der Einwirkung der Schwerkraft auf die Bewegung der ponderablen Körper.**

Die Gesetze dieser Erscheinungen lassen sich zusammenfassen in der Bedingung, dass die Variation des Integrals

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \left[ \sum \left( \frac{\partial \eta_i}{\partial t} \right)^2 - cc \left[ \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial x_3} - \frac{\partial \eta_3}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 dt \right. \\ \left. + \int V \left( \sum \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_i \partial t} dx_1 dx_2 dx_3 + 4\pi dm \right) dt + 2\pi \int dm \sum \left( \frac{\partial x_i}{\partial t} \right)^2 dt \right] \end{aligned}$$

unter geeigneten Grenzbedingungen 0 werde.

In diesem Ausdrucke sind die beiden ersten Integrale über den ganzen geometrischen Raum, die letzteren über alle ponderablen Körperelemente auszudehnen, die Coordinaten jedes ponderablen Körperelements aber als Functionen der Zeit, und  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, V$  als Functionen von  $x_1, x_2, x_3$  und  $t$  so zu bestimmen, dass eine den Grenzbedingungen genügende Variation derselben nur eine Variation zweiter Ordnung des Integrals hervorbringt.

Alsdann sind die Grössen  $\frac{\partial \eta}{\partial t} (= v)$  gleich den Geschwindigkeitscomponenten der Stoffbewegung, und  $V$  gleich dem Potential zur Zeit  $t$  im Punkte  $(x_1, x_2, x_3)$ .

. . . . .

# Bernhard Riemann's Lebenslauf.

---



Die nachfolgende Darstellung von Riemann's Lebenslauf bezweckt keineswegs, die Bedeutung seiner wissenschaftlichen Leistungen und deren Verhältniss zu dem früheren und gegenwärtigen Zustande der Mathematik in's Licht zu stellen, sie ist vielmehr nur für solche Leser bestimmt, welche einige Nachrichten über den Bildungsgang, den Charakter und die äusserlichen Schicksale des grossen Mathematikers zu erhalten wünschen, dessen Werke jetzt zum ersten Male vollständig gesammelt erscheinen.

Georg Friedrich Bernhard Riemann ist am 17. September 1826 in Breselenz, einem Dorfe im Königreich Hannover bei Dannenberg nahe der Elbe, geboren. Sein Vater Friedrich Bernhard Riemann, geboren in Boitzenburg an der Elbe in Mecklenburg, der als Lieutenant unter Wallmoden an den Befreiungskriegen Theil genommen, war dort Prediger und mit Charlotte, der Tochter des Hofrath Ebell aus Hannover verheirathet; er siedelte später mit seiner Familie nach der etwa drei Stunden entfernten Pfarre Quickborn über. Bernhard war das zweite von sechs Kindern. Schon früh wurde seine Lernbegierde durch den Vater geweckt, der ihn bis zum Abgange auf das Gymnasium fast allein unterrichtete. Als Knabe von fünf Jahren interessirte er sich sehr für Geschichte, für Züge aus dem Alterthum, und ganz besonders für das unglückliche Schicksal Polens, welches sein Vater ihm immer von Neuem erzählen musste. Sehr bald aber trat dies in den Hintergrund, und sein entschiedenes Talent für das Rechnen brach sich Bahn; er kannte kein grösseres Vergnügen, als selbst schwierige Exempel zu erfinden und dann seinen Geschwistern aufgeben. Später, vom zehnten Jahre Bernhard's an, liess sich der Vater bei dem Unterrichte der Kinder von dem Lehrer Schulz unterstützen; dieser gab guten Unterricht im Rechnen und in der Geometrie, musste sich jedoch bald sehr anstrengen, seines Schülers rascher, oft besserer Lösung einer Aufgabe zu folgen.

Im Alter von dreizehn und einem halben Jahr wurde Bernhard von dem Vater confirmirt und verliess darauf das elterliche Haus, in

welchem ein ernster, frommer Sinn und häuslich angeregtes Leben herrschte. Die Eltern sahen ihre Hauptaufgabe in der Erziehung ihrer Kinder; die innigste Liebe verband Riemann mit seiner Familie und hat sich durch sein ganzes ferneres Leben erhalten; sie spricht sich in seinen Briefen aus, die er an die entfernten Lieben richtet, wo er an Allem, was das Elternhaus betrifft, auch an den kleinsten Vorgängen das lebhafteste Interesse zeigt, und auch sie treulich alle seine Freuden und Leiden theilen lässt.

Zu Ostern 1840 kam Riemann nach Hannover, wo seine Grossmutter lebte, und wo er zwei Jahre — bis zum Tode derselben — die Tertia des Lyceums besuchte. Anfangs hatte er, wie es nach seiner bisherigen Erziehung zu erwarten war, mancherlei Schwierigkeiten zu überwinden, doch werden bald seine Fortschritte in den einzelnen Unterrichtsgegenständen gelobt, und immer ist er ein fleissiger und folgsamer Schüler. Namentlich aus dieser Zeit sind zahlreiche Briefe Riemann's an die geliebten Eltern und Geschwister erhalten, in welchen er, oft mit glücklichem Humor, von den Schulereignissen berichtet. Vorwiegend ist aber die Sehnsucht nach dem Elternhause; wenn die Ferien herannahen, so bittet er inständig um die Erlaubniss, dieselben in Quickborn zubringen zu dürfen, und lange vorher sinnt er auf Mittel, die Reise mit möglichst wenigen Kosten bewerkstelligen zu können; zu den Geburtstagen der Eltern und Geschwister macht er kleine Einkäufe und ist eifrig darauf bedacht, sie damit wirklich zu überraschen. Er lebt in Gedanken noch ganz in dem häuslichen Kreise. Bisweilen klingt aber auch eine wehmüthige Klage durch, wie schwer es ihm werde, mit fremden Menschen zu verkehren, und die Schüchternheit, welche, eine natürliche Folge seines früheren abgeschlossenen Lebens, ihn zu seinem Kummer auch den Lehrern bisweilen in falschem Lichte erscheinen lässt, hat ihn auch später nie gänzlich verlassen und oft angetrieben, sich der Einsamkeit und seiner Gedankenwelt zu überlassen, in welcher er die grösste Kühnheit und Vorurtheilslosigkeit entfaltet hat.

Nach dem Tode der Grossmutter wurde Riemann, wie es scheint auf seinen eignen Wunsch, Ostern 1842 von dem Vater auf das Johanneum zu Lüneburg gebracht, wo er zwei Jahre in Secunda und zwei Jahre in Prima bis zu seinem Abgange nach der Universität blieb. Gleich in die erste Zeit seines dortigen Aufenthaltes fiel der grosse Brand von Hamburg, der tiefen Eindruck auf ihn machte, und über den er ausführlich an seine Eltern berichtete. Die grössere Nähe bei seiner Heimath und die Möglichkeit, die Ferien in Quickborn in seiner Familie zu verleben, trug dazu bei, die fernere Schulzeit zu einer

glücklichen für ihn zu machen. Freilich war die Hin- und Herreise, die zum grössten Theil zu Fuss gemacht wurde, mit Anstrengungen verbunden, denen sein Körper nicht immer gewachsen war; schon in dieser Zeit spricht sich in den schönen Briefen seiner Mutter, die er leider bald verlieren sollte, ängstliche Sorge um seine Gesundheit aus, und oft wiederholen sich ihre herzlichen Ermahnungen, zu grosse körperliche Anstrengungen zu vermeiden. Er wohnte später bei dem Gymnasiallehrer Seffer, der sich lebhaft für ihn interessirte, und an dem er, wie aus seinen Briefen hervorgeht, einen väterlichen Freund und Beschützer gefunden hat. Er bekam gute Zeugnisse auch in anderen Fächern, in Mathematik aber immer glänzende, beim Abgange die Eins. Seine grosse Begabung für diese Wissenschaft wurde von dem trefflichen Director Schmalfuss erkannt; dieser liess ihm mathematische Werke zum Privatstudium und wurde oft überrascht und in Erstaunen gesetzt, wenn Riemann dieselben schon nach wenigen Tagen zurückbrachte und dann in der Unterhaltung zeigte, dass er sie durchgearbeitet und vollständig aufgefasst hatte. Diese neben seinen Schularbeiten betriebenen Studien müssen ihn weit über die Grenzen des Gymnasial-Unterrichtes hinaus in das Gebiet der höheren Mathematik geführt haben; die Bekanntschaft mit der höheren Analysis hat er, soviel bekannt ist, durch das Studium der Euler'schen Werke erworben; auch Legendre's *Théorie des Nombres* soll er in dieser Zeit gelesen haben.

Im Alter von neunzehn und einem halben Jahr bezog Riemann Ostern 1846 die Universität Göttingen. Der seinem geistlichen Berufe von Herzen ergebene Vater hegte den natürlichen Wunsch, er möge sich der Theologie widmen, und wirklich liess Riemann sich am 25. April als Studiosus der Philologie und Theologie immatriculiren; zu diesem mit seiner deutlich hervorgetretenen Neigung und Begabung für die Mathematik nicht im Einklange stehenden Entschlusse wird vor Allem die Rücksicht auf die Mittellosigkeit der kinderreichen Familie und die Hoffnung beigetragen haben, früher eine Anstellung zu finden und dadurch seinem Vater eine Erleichterung zu gewähren. Neben den philologischen und theologischen Vorlesungen hörte er aber auch mathematische, und zwar gleich im Sommersemester über die numerische Auflösung der Gleichungen bei Stern, und über Erdmagnetismus bei Goldschmidt, sodann im Wintersemester 1846—1847 über die Methode der kleinsten Quadrate bei Gauss, und über bestimmte Integrale bei Stern. Er sah bei dieser fortgesetzten Beschäftigung mit der Mathematik bald ein, dass die Neigung zu derselben zu mächtig in ihm war, und erwirkte von seinem Vater die Erlaubniss, sich ganz seinem Lieblingsstudium widmen zu dürfen.

Obgleich nun Gauss seit fast einem halben Jahrhundert unbestritten den Rang des grössten lebenden Mathematikers einnahm, so beschränkte sich seine zwar sehr anregende Lehrthätigkeit doch nur auf ein kleines Feld, welches mehr der angewandten Mathematik angehörte, und für Riemann war bei dem vorgeschrittenen Standpunkte seines Wissens eine wesentliche Bereicherung desselben und eine Befruchtung mit neuen Ideen damals in Göttingen nicht mehr zu erwarten. Er bezog daher Ostern 1847 die Universität Berlin, wo Jacobi, Lejeune Dirichlet und Steiner durch den Glanz ihrer Entdeckungen, welche sie zum Gegenstande ihrer Vorlesungen machten, zahlreiche Schüler um sich versammelten. Er blieb dort zwei Jahre, bis Ostern 1849, und hörte unter Anderem bei Dirichlet Zahlentheorie, Theorie der bestimmten Integrale und der partiellen Differentialgleichungen, bei Jacobi analytische Mechanik und höhere Algebra. Leider sind nur sehr wenige Briefe aus dieser Zeit erhalten; in einem derselben (vom 29. Nov. 1847) spricht er seine grosse Freude darüber aus, dass Jacobi sich gegen seine anfängliche Absicht noch entschlossen habe, Mechanik vorzutragen. In einen näheren Verkehr mit ihm trat Eisenstein, bei dem er in dem ersten Jahre Theorie der elliptischen Functionen hörte. Riemann hat später erzählt, dass sie auch über die Einführung der complexen Grössen in die Theorie der Functionen mit einander verhandelt haben, aber gänzlich verschiedener Meinung über die hierbei zu Grunde zu legenden Principien gewesen seien; Eisenstein sei bei der formellen Rechnung stehen geblieben, während er selbst in der partiellen Differentialgleichung die wesentliche Definition einer Function von einer complexen Veränderlichen erkannt habe. Wahrscheinlich sind diese, für seine ganze spätere Laufbahn maassgebenden Ideen zuerst in den Herbstferien 1847 gründlich von ihm verarbeitet.

Von dem übrigen Leben Riemann's während seines zweijährigen Aufenthaltes in Berlin ist nur wenig aus den Briefen zu ersehen. Die grossen politischen Ereignisse des Jahres 1848 ergriffen auch ihn mächtig; er war Augenzeuge der März-Revolution und hatte als Mitglied des von den Studenten gebildeten Corps die Wache im königlichen Schlosse vom 24. März Morgens 9 Uhr bis zum folgenden Tage Mittags 1 Uhr.

Ostern 1849 kehrte Riemann, nachdem er noch die Ankunft der Frankfurter Kaiser-Deputation in Berlin erlebt hatte, nach Göttingen zurück. Er besuchte in den drei folgenden Semestern noch einige naturwissenschaftliche und philosophische Vorlesungen, unter anderen mit grösstem Interesse die genialen Vorlesungen über Experimental-Physik von Wilhelm Weber, an welchen er sich später eng anschloss, und der ihm

bis zu seinem Tode ein treuer Freund und Rathgeber gewesen ist. In dieser Zeit müssen bei gleichzeitiger Beschäftigung mit philosophischen Studien, welche sich namentlich auf Herbart richteten, die ersten Keime seiner naturphilosophischen Ideen sich entwickelt haben; dies scheint wenigstens, soweit es sich nur um das Streben nach einer einheitlichen Naturauffassung handelt, aus einer Stelle eines Aufsatzes „Ueber Umfang, Anordnung und Methode des naturwissenschaftlichen Unterrichts auf Gymnasien“ hervorzugehen, den er im November 1850 als Mitglied des pädagogischen Seminars verfasste, und in welchem er sagt: „So z. B. lässt sich eine vollkommen in sich abgeschlossene mathematische Theorie zusammenstellen, welche von den für die einzelnen Punkte geltenden Elementargesetzen bis zu den Vorgängen in dem uns wirklich gegebenen continuirlich erfüllten Raume fortschreitet, ohne zu scheiden, ob es sich um die Schwerkraft, oder die Electricität, oder den Magnetismus, oder das Gleichgewicht der Wärme handelt.“ Im Herbst 1850 trat er auch in das kurz vorher gegründete mathematisch-physikalische Seminar ein, welches von den Professoren Weber, Ulrich, Stern und Listing geleitet wurde, und betheiligte sich namentlich an den physikalischen experimentellen Uebungen, obgleich er dadurch von seiner Hauptaufgabe, der Ausarbeitung der Doctordissertation, oft abgezogen wurde. Theils diesem Umstande, theils aber auch der fast ängstlichen Sorgfalt, welche Riemann auf die Ausarbeitung seiner für den Druck bestimmten Schriften verwendete, und die ihn auch später bei der Veröffentlichung seiner Arbeiten wesentlich gehemmt hat, wird es zuzuschreiben sein, dass er seine Abhandlung „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse“ erst im November des folgenden Jahres 1851 der philosophischen Facultät einreichen konnte. Dieselbe fand eine sehr anerkennende Beurtheilung von Gauss, welcher Riemann bei dessen Besuch mittheilte, dass er seit Jahren eine Schrift vorbereite, welche denselben Gegenstand behandle, sich aber freilich nicht darauf beschränke. Das Examen war am Mittwoch den 3. December, die öffentliche Disputation und Doctor-Promotion am Dienstag den 16. December. An seinen Vater schreibt er: „Durch meine jetzt vollendete Dissertation glaube ich meine Aussichten bedeutend verbessert zu haben; auch hoffe ich, dass ich mit der Zeit fließender und rascher schreiben lerne, namentlich wenn ich mehr Umgang suche und auch erst Gelegenheit habe, Vorträge zu halten; ich habe daher jetzt guten Muth.“ Zugleich entschuldigt er sich in Rücksicht auf die Kosten, die er dem Vater verursacht, dass er sich nicht eifriger um die durch Goldschmidt's Tod erledigte Observatorstelle an der Sternwarte bemüht

habe\*), und theilt mit, dass seiner Habilitation als Privatdocent nichts im Wege stehe, sobald er die Habilitationsschrift fertig habe. Es scheint schon früh seine Absicht gewesen zu sein, zum Gegenstande derselben die Theorie der trigonometrischen Reihen zu wählen, allein es vergehen bis zu seiner Habilitation doch wieder zwei und ein halbes Jahr.

In den Herbstferien 1852 hielt sich Lejeune Dirichlet, dem er noch von Berlin her wohl bekannt war, eine Zeit lang in Göttingen auf, und Riemann, der eben von Quickborn dorthin zurückgekehrt war, hatte das Glück, ihn fast täglich zu sehen. Gleich bei seinem ersten Besuche in der Krone, wo Dirichlet wohnte, und am folgenden Tage in einer Mittagsgesellschaft bei Sartorius von Waltershausen, in welcher auch die Professoren Dove aus Berlin und Listing gegenwärtig waren, fragte er Dirichlet, den er nächst Gauss als den grössten damals lebenden Mathematiker anerkannte, um Rath wegen seiner Arbeit. „Am andern Morgen — schreibt Riemann an seinen Vater — war Dirichlet etwa zwei Stunden bei mir; er gab mir die Notizen, die ich zu meiner Habilitationsschrift bedurfte, so vollständig, dass mir die Arbeit dadurch wesentlich erleichtert ist; ich hätte sonst auf der Bibliothek nach manchen Sachen lange suchen können. Auch meine Dissertation ging er mit mir durch und war überhaupt äusserst freundlich gegen mich, wie ich es bei dem grossen Abstände zwischen mir und ihm kaum erwarten durfte. Ich hoffe, er wird mich auch später nicht vergessen.“ Einige Tage darauf traf auch Wilhelm Weber von der Wiesbadener Naturforscher-Versammlung wieder in Göttingen ein; es wurde in grösserer Gesellschaft ein sehr lohnender Ausflug nach dem einige Stunden entfernten Hohen Hagen gemacht, und am folgenden Tage trafen Dirichlet und Riemann abermals im Weber'schen Hause zusammen. Solche persönliche Anregung war im höchsten Grade wohlthuend für Riemann, und er schreibt selbst hierüber an seinen Vater: „Du siehst, dass ich hier im Ganzen noch nicht sehr häuslich gelebt habe; aber ich bin dafür des Morgens desto fleissiger bei der Arbeit gewesen, und finde, dass ich so weiter gekommen bin, als wenn ich den ganzen Tag hinter meinen Büchern sitze.“

---

\*) Einer Mittheilung von W. Weber zufolge wünschte Gauss selbst nicht, dass Riemann diese Stellung übernehme; er zweifelte zwar nicht an seiner theoretischen und praktischen Befähigung für dieselbe, aber er hatte schon damals eine so hohe Meinung von Riemann's wissenschaftlicher Bedeutung, dass er befürchtete, derselbe möchte durch die mit dieser Stellung verbundenen zeitraubenden und zum Theil untergeordneten Dienstgeschäfte von seinem eigentlichen Arbeitsfelde gar zu sehr abgelenkt werden.

In jenen Tagen schreibt er auch von seiner Habilitation und von dem Anfange seiner Vorlesungen, wie von unmittelbar bevorstehenden Dingen, und er würde gewiss auch viel rascher in seiner äusserlichen Laufbahn fortgeschritten sein, wenn ihm öfter eine solche treibende Anregung zu Theil geworden wäre. Offenbar fällt in den Anfang des Jahres 1853 eine fast ausschliessliche Beschäftigung mit Naturphilosophie; seine neuen Gedanken gewinnen eine feste Gestalt, auf die er nach allen Unterbrechungen stets wieder zurückgekommen ist. Endlich ist auch die Habilitationsschrift fertig, und er schreibt an seinen jüngeren Bruder Wilhelm am 28. December 1853: „Mit meinen Arbeiten steht es jetzt so ziemlich; ich habe Anfangs December meine Habilitationsschrift\*) abgeliefert und musste dabei drei Themata zur Probevorlesung vorschlagen, von denen dann die Facultät eines wählt. Die beiden ersten hatte ich fertig und hoffte, dass man eins davon nehmen würde; Gauss aber hatte das dritte\*\*) gewählt, und so bin ich nun wieder etwas in der Klemme, da ich dies noch ausarbeiten muss. Meine andere Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Electricität, Galvanismus, Licht und Schwere hatte ich gleich nach Beendigung meiner Habilitationsschrift wieder aufgenommen und bin mit ihr so weit gekommen, dass ich sie in dieser Form unbedenklich veröffentlichen kann. Es ist mir dabei aber zugleich immer gewisser geworden, dass Gauss seit mehreren Jahren auch daran arbeitet, und einigen Freunden, u. A. Weber, die Sache unter dem Siegel der Verschwiegenheit mitgetheilt hat, — Dir kann ich dies wohl schreiben, ohne dass es mir als Anmaassung ausgelegt wird — ich hoffe, dass es nun für mich noch nicht zu spät ist und es anerkannt werden wird, dass ich die Sachen vollkommen selbständig gefunden habe.“

Um diese Zeit wurde Riemann im mathematisch-physikalischen Seminar Assistent von W. Weber und hatte als solcher die Uebungen der Neueintretenden zu leiten, auch einige Vorträge zu halten. Ueber den weiteren Fortgang seiner Arbeiten schreibt er am 26. Juni 1854 aus Quickborn seinem Bruder: „Um Weihnachten habe ich Dir von Göttingen aus, wie ich glaube, geschrieben, dass ich meine Habilitationsschrift Anfang December vollendet und an den Decan abgegeben hätte, sowie auch, dass ich bald darauf mich wieder mit meiner Untersuchung über den Zusammenhang der physikalischen Grundgesetze beschäftigte und mich so darin vertiefte, dass ich, als mir das Thema zur Probevorlesung beim Colloquium gestellt war, nicht gleich wieder davon

---

\*) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

\*\*) Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

loskommen konnte. Ich ward nun bald darauf krank, theils wohl in Folge zu vielen Grübelns, theils in Folge des vielen Stubensitzens bei dem schlechten Wetter; es stellte sich mein altes Uebel wieder mit grosser Hartnäckigkeit ein und ich kam dabei mit meinen Arbeiten nicht vom Fleck. Erst nach mehreren Wochen, als das Wetter besser wurde und ich wieder mehr Umgang suchte, ging es mit meiner Gesundheit besser. Für den Sommer habe ich nun eine Gartenwohnung gemiethet und habe seitdem gottlob über meine Gesundheit nicht zu klagen gehabt. Nachdem ich etwa vierzehn Tage nach Ostern mit einer andern Arbeit, die ich nicht gut vermeiden konnte, fertig geworden war, ging ich nun eifrig an die Ausarbeitung meiner Proberlesung und wurde um Pfingsten damit fertig. Ich erreichte es indess nur mit vieler Mühe, dass ich mein Colloquium gleich machen konnte und nicht noch wieder unverrichteter Sache nach Quickborn abreisen musste. Gauss's Gesundheitszustand ist nämlich in der letzten Zeit so schlimm geworden, dass man noch in diesem Jahre seinen Tod fürchtet und er sich zu schwach fühlte, mich zu examiniren. Er wünschte nun, dass ich, weil ich doch erst im nächsten Semester lesen könnte, wenigstens noch bis zum August auf seine Besserung warten möchte. Ich hatte mich schon in das Unvermeidliche gefügt. Da entschloss er sich plötzlich auf mein wiederholtes Bitten, „um die Sache vom Halse los zu werden“, am Freitag nach Pfingsten Mittag das Colloquium auf den andern Tag um halb elf anzusetzen und so war ich am Sonnabend um eins glücklich damit fertig. — Lass Dir nun noch in aller Eile erzählen, was es mit der andern Arbeit, die mich um Ostern beschäftigte, für eine Bewandniss hat. In den Osterferien war Kohlrausch — ein Sohn vom Oberschulrath und Vetter und Schwager von Schmalfluss — der jetzt Professor in Marburg ist, auf vierzehn Tage bei Weber zum Besuch, um mit ihm gemeinschaftlich eine experimentelle Untersuchung über Electricität zu machen, da Weber zu dem einen Theil dieser Untersuchung, Kohlrausch zu dem anderen Theil derselben die Vorarbeiten gemacht und die Apparate erdacht und construirt hatte. Ich nahm an ihren Experimenten Theil und lernte bei dieser Gelegenheit Kohlrausch kennen. Kohlrausch hatte nun einige Zeit vorher sehr genaue Messungen über eine bis dahin unerforschte Erscheinung (den electrischen Rückstand in der Leidener Flasche) gemacht und veröffentlicht und ich hatte durch meine allgemeinen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen Electricität, Licht und Magnetismus die Erklärung davon gefunden. Ich sprach nun mit K. darüber und dies war die Veranlassung, dass ich die Theorie dieser Erscheinung für ihn ausarbeitete und ihm zuschickte. Kohlrausch hat

mir nun jetzt sehr freundlich geantwortet, mir angeboten, meine Arbeit an Poggendorff, den Herausgeber der Annalen der Physik und Chemie, in Berlin zum Druck zu schicken, und mich eingeladen, ihn in diesen Herbstferien zu besuchen, um die Sache weiter zu verfolgen. Mir ist diese Sache deshalb wichtig, weil es das erste Mal ist, wo ich meine Arbeiten auf eine vorher noch nicht bekannte Erscheinung anwenden konnte, und ich hoffe, dass die Veröffentlichung dieser Arbeit dazu beitragen wird, meiner grösseren Arbeit eine günstige Aufnahme zu verschaffen. Hier in Quickborn werde ich mich nun wohl theils mit dem Druck dieser Arbeit, da mir die Correcturbogen wahrscheinlich zugeschickt werden, theils mit der Ausarbeitung einer Vorlesung für nächstes Semester beschäftigen müssen.“

Zu dem ersten Theile des Briefes ist noch zu bemerken, dass Riemann die Ausarbeitung seiner Probevorlesung über die Hypothesen der Geometrie sich durch sein Streben, allen, auch den nicht mathematisch gebildeten Mitgliedern der Facultät möglichst verständlich zu bleiben, wesentlich erschwert hat; die Abhandlung ist aber hierdurch in der That zu einem bewunderungswürdigen Meisterstück auch in der Darstellung geworden, indem sie ohne Mittheilung der analytischen Untersuchung den Gang derselben so genau angiebt, dass sie nach diesen Vorschriften vollständig hergestellt werden kann. Gauss hatte gegen das übliche Herkommen von den drei vorgeschlagenen Themen nicht das erste, sondern das dritte gewählt, weil er begierig war zu hören, wie ein so schwieriger Gegenstand von einem so jungen Manne behandelt werden würde; nun setzte ihn die Vorlesung, welche, alle seine Erwartungen übertraf, in das grösste Erstaunen, und auf dem Rückwege aus der Facultäts-Sitzung sprach er sich gegen Wilhelm Weber mit höchster Anerkennung und mit einer bei ihm seltenen Erregung über die Tiefe der von Riemann vorgetragenen Gedanken aus.

Nach einem längeren Aufenthalte in Quickborn kehrte Riemann im September nach Göttingen zurück, um an der Naturforscher-Versammlung Theil zu nehmen; auf Weber's und Stern's Aufforderung entschloss er sich, in der mathematisch-physikalisch-astronomischen Section einen Vortrag über die Verbreitung der Electricität in Nichtleitern zu halten. Er schreibt darüber an seinen Vater: „Mein Vortrag kam am Donnerstag an die Reihe, und da für diese Sitzung unserer Section kein anderer angekündigt war, so arbeitete ich die Sache noch den Abend vorher etwas weiter aus, um die gewöhnliche Zeit der Sitzungen einigermaassen auszufüllen. Ich hatte anfangs nur das Gesetz, welches ich mittheilen wollte, kurz angeben wollen, wandte es aber nun noch auf mehrere Erscheinungen an und zeigte die Ueber-

einstimmung mit der Erfahrung. Mein Vortrag war nun freilich in diesem letzten Theile weniger fliegend, aber ich glaube doch, dass der Eindruck des Ganzen durch Hinzufügung desselben gewonnen hat; ich sprach ungefähr  $\frac{5}{4}$  Stunden. — Dass ich bei der Versammlung einmal öffentlich gesprochen habe, hat mir wieder etwas mehr Muth zu meiner Vorlesung gemacht; doch habe ich zugleich gesehen, wie gross der Unterschied ist, ob man schon längere Zeit vorher mit seinen Gedanken ins Reine gekommen ist, oder noch unmittelbar vorher daran gearbeitet hat. Ich hoffe in einem halben Jahre schon mit mehr Ruhe an meine Vorlesungen zu denken, und mir nicht wieder meinen Aufenthalt in Quickborn und mein Zusammensein mit Euch so dadurch verleiden zu lassen, wie das letzte Mal.“ Auch mit Kohlrausch war er in Göttingen wieder zusammengetroffen; nach einem weiteren Briefwechsel entschloss sich aber Riemann, auf die Veröffentlichung seines Aufsatzes über den Rückstand in der Leidener Flasche zu verzichten, vermuthlich weil er nicht gern auf eine ihm angerathene Abänderung desselben eingehen wollte. Statt dessen erschien in Poggendorff's Annalen der Aufsatz über die Theorie der Nobili'schen Farbenringe, über welchen er an seine ältere Schwester Ida schreibt: „Es ist dieser Gegenstand deshalb wichtig, weil sich hiernach sehr genaue Messungen anstellen und die Gesetze, nach denen die Electricität sich bewegt, sehr genau daran prüfen lassen.“

In demselben Briefe vom 9. October 1854 schreibt er mit grosser Freude von dem Zustandekommen seiner ersten Vorlesung, zu welcher über sein Erwarten viele Zuhörer, etwa acht, sich gemeldet hatten. Der Gegenstand derselben war die Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung auf physikalische Probleme; als Vorbild dienten ihm der Hauptsache nach die Vorlesungen, welche Dirichlet unter gleichem Titel in Berlin gehalten hatte. Ueber seinen Vortrag schreibt er am 18. November 1854 seinem Vater: „Mein Leben hat hier jetzt nach und nach eine ziemlich regelmässige und einförmige Gestalt angenommen. Meine Collegia habe ich bis jetzt regelmässig halten können, meine anfängliche Befangenheit hat sich schon ziemlich gelegt und ich gewöhne mich daran, mehr an die Zuhörer, als an mich dabei zu denken, und in ihren Mienen zu lesen, ob ich vorwärts gehen oder die Sache noch weiter auseinander setzen muss.“ Es ist indessen keinem Zweifel unterworfen, dass der mündliche Vortrag ihm in den ersten Jahren seiner akademischen Lehrthätigkeit grosse Schwierigkeiten verursachte. Seine glänzende Denkkraft und vorahnende Phantasie liess ihn meist, was besonders bei zufälligen mündlichen Unterhaltungen über wissenschaftliche Gegenstände zum

Vorschein kam, sehr grosse Schritte nehmen, denen man nicht so leicht folgen konnte, und wenn man ihn zu einer näheren Erörterung einiger Zwischenglieder seiner Schlüsse aufforderte, so konnte er stutzig werden und es verursachte ihm einige Mühe, sich in den langsameren Gedankengang des Anderen zu fügen und dessen Zweifel rasch zu beseitigen. So hat ihn auch bei seinen Vorlesungen die Beobachtung der Mienen seiner Zuhörer, von der er oben schreibt, oft empfindlich gestört, wenn er, bisweilen ganz gegen sein Erwarten, sich genöthigt glaubte, einen für ihn fast selbstverständlichen Punkt noch besonders zu beweisen. Dies hat sich aber nach längerer Uebung verloren, und die verhältnissmässig grosse Zahl seiner Schüler ist nicht blos der Anziehungskraft seines durch die tiefsinnigsten Werke berühmt gewordenen Namens, sondern auch seinem Vortrage zuzuschreiben, auf den er sich stets sehr sorgfältig vorbereitete, und durch welchen es ihm gelang, seine Zuhörer über die grossen Schwierigkeiten hinwegzuführen, die sich dem Eindringen in die von ihm geschaffenen neuen Principien entgegenstellen.

Am 23. Februar 1855 starb Gauss, und bald darauf wurde Lejeune Dirichlet von Berlin nach Göttingen berufen. Bei dieser Gelegenheit wurde von mehreren Seiten, aber vergeblich dahin gewirkt, dass Riemann zum ausserordentlichen Professor ernannt werden möchte; erreicht wurde nur, dass ihm eine Remuneration von jährlich 200 Thaler von der Regierung ausgesetzt wurde; so gering diese Summe war, eine so wichtige Erleichterung gewährte sie Riemann, der in dieser und der nächsten Zeit wohl oft mit düsterem Blick in die Zukunft schaute. Es begann eine Reihe von traurigen Jahren, in denen ihn ein schmerzlicher Schlag nach dem anderen traf. Noch im Jahre 1855 verlor er seinen Vater und eine Schwester, Clara; die alte, so innig geliebte Heimath in Quickborn wurde verlassen, seine drei Schwestern zogen zu dem Bruder Wilhelm nach Bremen, der dort Postsecretair war und von jetzt an die Sorge für die Erhaltung der Familie übernahm.

Riemann wandte sich jetzt mit erneueter Eifer wieder seinen schon in den Jahren 1851 und 1852 begonnenen Untersuchungen über die Theorie der Abel'schen Functionen zu und machte dieselbe zum ersten Male von Michaelis 1855 bis Michaelis 1856 zum Gegenstande seiner Vorlesungen, an denen drei Zuhörer, Schering, Bjerknæs und sein College Dedekind Theil nahmen. Im Sommer 1856 wurde er zum Assessor der mathematischen Classe der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ernannt; als solcher überreichte er am 2. November seine Abhandlung über die Gauss'sche Reihe und schrieb an demselben

Tage seinem Bruder: „Auch hoffe ich, dass meine Arbeiten mir Früchte tragen sollen. Meine Abhandlung ist, wie ich Dir schon schrieb, jetzt zum Druck fertig, und vielleicht wird sie die Societät in ihren Schriften drucken lassen, allerdings eine grosse Ehre, da diese in den letzten 50 Jahren nur mathematische Abhandlungen von Gauss enthalten haben. Die mathematische Section der Societät, bestehend aus Weber, Ulrich und Dirichlet wird wenigstens nach Weber's Aeusserungen wohl auf den Druck meiner Abhandlung antragen. — Mit meinen Vorlesungen, d. h. mit dem Besuch derselben, bin ich ziemlich zufrieden, besonders bei der geringen Zahl der neu angekommenen Studenten. Es sind gar keine Mathematiker unter diesen und das ist auch wohl der Grund, dass Dedekind und Westphal ihre Privatvorlesungen nicht zu Stande bekommen haben. Die Anzahl meiner Zuhörer betrug nun an den vier Tagen, an denen ich gelesen habe, erst drei, dann vier und die letzten beiden Male fünf; doch war hierunter wohl ein Hospitant. Sehr lieb ist es mir, dass ich diesmal auch einige Zuhörer aus den ersten Semestern habe, nicht wie sonst bloss aus dem sechsten und späteren Semestern, weil ich dies als ein Zeichen betrachte, dass meine Vorlesungen leichter verständlich werden. Bei alledem kann ich noch nicht behaupten, dass meine Vorlesungen zu Stande gekommen sind; denn es hat sich noch Niemand bei mir gemeldet und ist also immer noch möglich, dass meine Herren Zuhörer mich im Stiche lassen. — Meine freie Zeit werde ich von jetzt an ganz auf die Arbeit über die Abel'schen Functionen, von der ich Dir erzählt habe, verwenden. Kurz vor meiner Wiederankunft hier in Göttingen ist auch der Hauptredacteur des mathematischen Journals, der Dr. Borchardt aus Berlin, hier gewesen und hat mir durch Dirichlet und Dedekind die Aufforderung zugehen lassen, ihm doch so bald wie möglich eine Darstellung meiner Untersuchungen über die Abel'schen Functionen, sie sei so roh wie sie wolle, zu schicken. Weierstrass ist jetzt stark im Publiciren, doch enthält das jetzt veröffentlichte Heft, von dem Scherk mir erzählte, nur die ersten Vorbereitungen zu seiner Theorie.“

In der That widmete er sich nun mit allen Kräften der Ausarbeitung dieses Werkes, so dass er die ersten drei kleineren Abhandlungen am 18. Mai, die vierte grössere am 2. Juli 1857 im Manuscript nach Berlin abschicken konnte; allein durch die übermässige Anstrengung hatte seine Gesundheit sehr gelitten, und er befand sich am Ende des Sommersemesters in einem Zustande geistiger Abspannung, der seine Stimmung im höchsten Grade verdüsterte. Zur Erfrischung und Stärkung seiner Gesundheit nahm er für einige Wochen seinen Aufenthalt in Harzburg, wohin ihn sein Freund Ritter (damals Lehrer

an dem Polytechnicum zu Hannover, jetzt Professor in Aachen) auf einige Tage begleitete, und wohin ihm später sein College Dedekind folgte, mit dem er viele Spaziergänge und auch grössere Ausflüge in den Harz machte. Auf solchen Spaziergängen erheiterte sich seine Stimmung, sein Zutrauen zu Anderen und zu sich selbst wuchs; sein harmloser Scherz und seine rückhaltlose Unterhaltung über wissenschaftliche Gegenstände machten ihn zu dem lebenswürdigsten und anregendsten Gesellschafter. In dieser Zeit wandten sich seine Gedanken wieder der Naturphilosophie zu, und eines Abends nach der Rückkehr von einer anstrengenden Wanderung griff er zu Brewster's Life of Newton, und sprach lange mit Bewunderung über den Brief an Bentley, in welchem Newton selbst die Unmöglichkeit unmittelbarer Fernwirkung behauptet.

Bald nach seiner Rückkehr nach Göttingen wurde er am 9. November 1857 zum ausserordentlichen Professor in der philosophischen Facultät ernannt, und seine Remuneration von 200 Thaler auf 300 Thaler erhöht. Aber fast gleichzeitig erschütterte ihn auf das Tiefste der Tod seines innig geliebten Bruders Wilhelm; er übernimmt nun ganz die Sorge für seine drei noch lebenden Schwestern und dringt inständig darauf, dass sie noch im Laufe des Winters zu ihm nach Göttingen übersiedeln; dies geschah auch im Anfang März 1858, aber erst nachdem ihnen die jüngste Schwester, Marie, noch durch den Tod entrissen war. Nach so vielen Schicksalsschlägen trug das Zusammenleben mit den Schwestern wesentlich zur Besserung seiner tief niedergedrückten Gemüthsstimmung bei, und die Anerkennung, welche von nun an, wenn auch langsam, seinen Werken auch in weiteren Kreisen zu Theil wurde, hob allmählich sein gesunkenes Selbstvertrauen und liess ihn frischen Muth zu neuen Arbeiten finden. Schon vorher hatte er den später viel besprochenen Aufsatz „Ein Beitrag zur Electrodynamik“ verfasst, über welchen er seiner Schwester Ida schreibt: „Meine Entdeckung über den Zusammenhang zwischen Electricität und Licht habe ich hier der Königl. Societät übergeben. Nach manchen Aeusserungen, die ich darüber vernommen, muss ich schliessen, dass Gauss eine andere von der meinigen verschiedene Theorie dieses Zusammenhangs aufgestellt und seinen nächsten Bekannten mitgetheilt hat. Ich bin aber völlig überzeugt, dass die meinige die richtige ist und in ein paar Jahren allgemein als solche anerkannt werden wird.“ Er hat bekanntlich diese Arbeit bald wieder zurückgezogen und auch später nicht veröffentlicht, wahrscheinlich weil er selbst mit der in ihr enthaltenen Ableitung nicht mehr zufrieden war.

In den Herbstferien 1858 machte er die Bekanntschaft der italieni-

schen Mathematiker Brioschi, Betti und Casorati, welche damals eine Reise durch Deutschland machten und auch einige Tage in Göttingen verweilten; diese Verbindung sollte später in Italien wieder angeknüpft werden.

In diese Zeit fiel die Erkrankung Dirichlet's, welcher seinen langen Leiden am 5. Mai 1859 erlag. Er hatte von Anfang an das lebhafteste persönliche Interesse für Riemann empfunden und bei allen Gelegenheiten bethätigt, wo er auf eine Verbesserung der äusserlichen Verhältnisse Riemann's hinwirken konnte. Inzwischen war des Letzteren wissenschaftliche Bedeutung so allgemein anerkannt, dass die Regierung nach Dirichlet's Tode von der Berufung eines auswärtigen Mathematikers absah; Ostern 1859 wurde für Riemann eine Wohnung in der Sternwarte eingeräumt, am 30. Juli wurde er zum ordentlichen Professor ernannt und im December einstimmig zum ordentlichen Mitgliede der Gesellschaft der Wissenschaften erwählt. Schon vorher, am 11. August, hatte die Berliner Akademie der Wissenschaften ihn zum correspondirenden Mitgliede in der physikalisch-mathematischen Classe ernannt, und dies veranlasste ihn, im September in Dedekind's Gesellschaft nach Berlin zu reisen, wo er von den dortigen Gelehrten, Kummer, Borchardt, Kronecker, Weierstrass mit Auszeichnung und grosser Herzlichkeit aufgenommen wurde. Eine Folge seiner Ernennung, welcher später, im März 1866, die Wahl zum auswärtigen Mitgliede gefolgt ist,\*) und dieses Besuchs war es, dass er im October seine Abhandlung über die Häufigkeit der Primzahlen der Berliner Akademie einreichte und einen, nach seinem Tode veröffentlichten Brief über die vielfach periodischen Functionen an Weierstrass richtete.

Einen Monat später übergab er der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften seine Abhandlung über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite.

In den Osterferien 1860 machte er eine Reise nach Paris, wo er sich vom 26. März ab einen Monat aufhielt; leider war das Wetter sehr rauh und unfreundlich, noch in der letzten Woche gab es mehrere Tage hinter einander Schnee und Hagel, so dass die Besichtigung von Merkwürdigkeiten oft geradezu unmöglich war. Dagegen war er sehr

---

\*) Bezüglich der äusserlichen Auszeichnungen, deren Riemann theilhaftig geworden ist, mag hier noch bemerkt werden, dass die Bayerische Akademie der Wissenschaften ihn am 28. November 1859 zum correspondirenden, am 28. November 1863 zum ordentlichen Mitgliede, ferner dass die Pariser Akademie ihn am 19. März 1866 zu ihrem correspondirenden Mitgliede ernannte; ebenso wurde er am 14. Juni 1866, kurz vor seinem Tode, von der Londoner Royal Society zu deren auswärtigem Mitgliede erwählt.

zufrieden mit der freundlichen Aufnahme von Seiten der Pariser Gelehrten Serret, Bertrand, Hermite, Puiseux und Briot, bei welchem er einen Tag auf dem Lande in Chatenay mit Bouquet sehr angenehm verlebte.

In demselben Jahre vollendete er seine Abhandlung über die Bewegung eines flüssigen Ellipsoides und wendete sich der Bearbeitung der von der Pariser Akademie gestellten Preisaufgabe über die Theorie der Wärmeleitung zu, für welche er durch seine Untersuchungen über die Hypothesen der Geometrie schon früher die Grundlagen gewonnen hatte. Im Juni 1861 sandte er seine in lateinischer Sprache abgefasste Lösung unter dem Motto „*Et his principiis via sternitur ad majora*“ ein; dieselbe errang indessen den Preis nicht, weil es ihm an Zeit gefehlt hatte, die zur Durchführung nöthige Rechnung vollständig mitzutheilen.

Das in den letzten Jahren ungetrübte, glückliche Leben, dessen Riemann sich erfreuen durfte, erreichte seinen Höhepunkt, als er sich am 3. Juni 1862 mit Fräulein Elise Koch aus Körchow in Mecklenburg-Schwerin, einer Freundin seiner Schwestern verheirathete; es war ihr beschieden, die bevorstehenden Jahre des Leidens mit ihm zu theilen und durch unermüdliche Liebe zu verschönern. Schon im Juli desselben Jahres befiel ihn eine Brustfellentzündung, von welcher er scheinbar zwar sich rasch erholte, welche aber doch den Keim zu einer Lungenkrankheit zurückliess, die sein frühes Ende herbeiführen sollte. Als ihm von den Aerzten ein längerer Aufenthalt im Süden zur Heilung angerathen war, gelang es der dringenden Verwendung von Wilhelm Weber und Sartorius von Waltershausen, von der Regierung nicht nur den erforderlichen Urlaub, sondern auch eine ausreichende Unterstützung zu einer Reise nach Italien für ihn auszuwirken, welche er im November 1862 antrat. Durch Sartorius von Waltershausen auf das Wärmste empfohlen, fand er das freundlichste Entgegenkommen in der Familie des Consuls Jäger in Messina, auf deren Villa in der Vorstadt Gazzi er den Winter verlebte. Sein Befinden besserte sich rasch, und er konnte Ausflüge nach Taormina, Catania und Syracus unternehmen. Auf der Rückreise, welche er am 19. März 1863 antrat, besuchte er Palermo, Neapel, Rom, Livorno, Pisa, Florenz, Bologna, Mailand; bei längerem Aufenthalte in diesen Städten, deren Kunstschätze und Alterthümer sein grösstes Interesse erweckten, machte er zugleich Bekanntschaft mit den bedeutendsten Gelehrten Italiens, und namentlich schloss er sich mit inniger Freundschaft an Professor Enrico Betti in Pisa an, den er schon im Jahre 1858 in Göttingen kennen gelernt hatte. Ueberhaupt bildet der mehrjährige Aufenthalt Riemann's in Italien, so traurig die nächste Veranlassung desselben auch war,

einen wahren Lichtpunkt in seinem Leben; nicht allein, dass ihn das Schauen aller Herrlichkeit dieses entzückenden Landes, von Natur und Kunst, unendlich beglückte, er fühlte sich dort auch als freier Mensch dem Menschen gegenüber, ohne alle die hemmenden Rücksichten, die er in Göttingen auf Schritt und Tritt nehmen zu müssen meinte; dies Alles und der wohlthätige Einfluss des herrlichen Klimas auf seine Gesundheit stimmte ihn oft recht froh und heiter und liess ihn dort viele glückliche Tage verleben.

Mit den besten Hoffnungen verliess er das ihm so lieb gewordene Italien, allein er zog sich auf dem Uebergange über den Splügen, wo er unvorsichtiger Weise eine Strecke lang zu Fuss durch den Schnee ging, eine heftige Erkältung zu, und nach der Ankunft in Göttingen, welche am 17. Juni erfolgte, war sein Befinden fortwährend so schlecht, dass er sich sehr bald zu einer zweiten Reise nach Italien entschliessen musste, welche er am 21. August 1863 antrat. Er wandte sich zunächst nach Meran, Venedig, Florenz, dann nach Pisa, wo ihm am 22. December 1863 eine Tochter geboren wurde, welche nach seiner älteren Schwester den Namen Ida erhielt. Unglücklicher Weise war der Winter so kalt, dass der Arno zufror. Im Mai 1864 bezog er eine Villa vor Pisa; hier verlor er Ende August seine jüngere Schwester, Helene; er selbst wurde von der Gelbsucht befallen, welche auch eine Verschlimmerung seines Brustleidens zur Folge hatte. Eine Berufung nach Pisa an Stelle von Professor Mosotti, welche schon im Jahre 1863 durch Vermittlung von Betti an ihn ergangen war, hatte er theils auf den Rath seiner Göttinger Freunde, hauptsächlich aber wohl aus dem Grunde abgelehnt, weil er die mit der ihm angetragenen Stellung verbundenen Pflichten bei seinem angegriffenen Gesundheitszustande nicht vollständig erfüllen zu können befürchtete und deshalb sich ausser Stande fühlte, die Annahme des Rufes vor sich zu verantworten. Dasselbe Pflichtgefühl erweckte den dringenden Wunsch in ihm, nach Göttingen zurückzukehren und sich wieder seinem Lehramte zu widmen, und nur auf die ernstesten Vorstellungen der Aerzte und seiner Freunde entschloss er sich dazu, auch den folgenden Winter in Italien zuzubringen, welchen er zu Pisa in angenehmem geselligen und wissenschaftlichen Verkehr mit den dortigen Gelehrten Betti, Felici, Novi, Villari, Tassinari, Beltrami verlebte; in jener Zeit arbeitete er auch an seiner Abhandlung über das Verschwinden der Theta-Functionen. Den Mai und Juni 1865 brachte er bei schlechtem Befinden in Livorno, den Juli und August am Lago Maggiore, den September in Pegli bei Genua zu, wo durch ein gastrisches Fieber eine bedeutende Verschlimmerung seines Zustandes eintrat.

Unter diesen Umständen konnte Riemann seinem immer lebhafteren Wunsche, nach Göttingen zurückzukehren, nicht länger widerstehen; er langte am 3. October an und verlebte daselbst den Winter bei erträglich gutem Befinden, welches ihm meistens gestattete, einige Stunden täglich zu arbeiten. Er vollendete die Abhandlung über das Verschwinden der Theta-Functionen und übertrug seinem früheren Schüler Hattendorff die Ausarbeitung der Abhandlung über die Minimalflächen; er sprach auch öfter den Wunsch aus, vor seinem Ende noch über einige seiner unvollendeten Arbeiten mit Dedekind zu sprechen, fühlte sich aber stets zu schwach und angegriffen, um denselben zu einem Besuche in Göttingen zu veranlassen. In den letzten Monaten beschäftigte er sich mit der Ausarbeitung einer Abhandlung über die Mechanik des Ohres, welche leider nicht vollendet und nur als Fragment nach seinem Tode von Henle und Schering herausgegeben ist.

Die Vollendung dieser Abhandlung sowie einiger anderen Arbeiten lag ihm sehr am Herzen, und er hoffte durch einen Aufenthalt von einigen Monaten am Lago Maggiore, wohin ihn ausserdem grosse Sehnsucht nach dem ihm so lieb gewordenen Lande trieb, die dazu erforderlichen Kräfte noch sammeln zu können. So entschloss er sich am 15. Juni 1866, in den ersten Kriegstagen, zu seiner dritten Reise nach Italien; dieselbe wurde schon in Cassel unterbrochen, weil die Eisenbahn zerstört war, doch gelangte er mit Fuhrwerk glücklich bis Giessen, von wo die Weiterreise keine ferneren Hindernisse fand. Am 28. Juni traf er am Lago Maggiore ein, wo er in der Villa Pisoni in Selasca bei Intra wohnte. Rasch nahmen seine Kräfte ab, und er selbst fühlte mit voller Klarheit sein Ende herannahen; aber noch am Tage vor seinem Tode arbeitete er, unter einem Feigenbaum ruhend und von grosser Freude über den Anblick der herrlichen Landschaft erfüllt, an seinem letzten, leider unvollendet gebliebenen Werke. Sein Ende war ein sehr sanftes, ohne Kampf und Todesschauer; es schien, als ob er mit Interesse dem Scheiden der Seele vom Körper folgte; seine Gattin musste ihm Brod und Wein reichen, er trug ihr Grüsse an die Lieben daheim auf und sagte ihr: küsse unser Kind. Sie betete das Vater Unser mit ihm, er konnte nicht mehr sprechen; bei den Worten „Vergieb uns unsere Schuld“ richtete er gläubig das Auge nach oben; sie fühlte seine Hand in der ihrigen kälter werden, und nach einigen Athemzügen hatte sein reines, edeles Herz zu schlagen aufgehört. Der fromme Sinn, der im Vaterhaus gepflanzt war, blieb ihm durch das ganze Leben, und er diente, wenn auch nicht in derselben Form, treu seinem Gott; mit der grössten Pietät vermied er, Andere in ihrem Glauben zu stören; die tägliche Selbstprüfung vor dem An-

gesichte Gottes war, nach seinem eigenen Ausspruche, für ihn eine Hauptsache in der Religion.

Er ruht auf dem Kirchhofe zu Biganzolo, wohin Selasca eingepfarrt ist. Sein Grabstein trägt die Inschrift:

Hier ruhet in Gott

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN, Prof. zu Göttingen,  
geb. in Breselenz 17. Sept. 1826, gest. in Selasca 20. Juli 1866.

Denen die Gott lieben müssen alle Dinge zum Besten dienen. \*)

---

\*) Der Grabstein, der ihm von italienischen Freunden und Fachgenossen gewidmet war, ist bei einer Verlegung des Friedhofes beseitigt worden.